Devoir libre n°09
à rendre le 02/02/2018

1° Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall t \geq 0, \forall n$ entier strictement positif

$$\int_0^t g(s) \left\{ \int_0^s g(u) du \right\}^n ds = \frac{1}{n+1} \left\{ \int_0^t g(s) ds \right\}^{n+1}.$$

(On pourra dériver chacun des deux membres considéré comme fonction de la variable t .)

2° Soit f, g, u trois fonctions continues, définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles vérifiant

$$\forall t \geq 0, u(t) \leq f(t) + g(t) \int_0^t u(s) ds.$$

On désigne par $v(t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$v(t) = \int_0^t u(s) ds,$$

et par w la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$w(t) = v(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right].$$

a) Montrer que $v'(t) \leq f(t) + v(t)g(t)$.

b) On suppose que $\forall t \geq 0, g(t) = a$.

Montrer que $w'(t) \leq e^{-at}f(t)$. En déduire

$$w(t) \leq \int_0^t e^{-as}f(s) ds \quad \text{et} \quad v(t) \leq \int_0^t f(s) e^{a(t-s)} ds.$$

c) g étant quelconque, montrer que

$$w'(t) \leq f(t) \exp \left[- \int_0^t g(s) ds \right]$$

puis que

$$v(t) \leq \int_0^t f(s) \left\{ \exp \int_s^t g(x) dx \right\} ds.$$

d) Trouver les fonctions u , continues, ne prenant que des valeurs positives ou nulles telles que

$$\forall t \geq 0, u(t) \leq g(t) \int_0^t u(s) ds.$$

3° Soit u et Φ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$.
On considère la fonction U définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} U(t) = \int_0^t u(t-s)\Phi(s) ds, & \forall t > 0 \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

a) On suppose que u et Φ sont à valeurs positives ou nulles.
En écrivant, pour $t' > t$,

$$U(t') - U(t) = \int_0^t \{u(t'-s) - u(t-s)\} \Phi(s) ds + \int_t^{t'} u(t'-s) \Phi(s) ds$$

montrer que si u est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors U est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer la continuité de U au point $t = 0$.

Soit $t_0 > 0$ et $t \in [t_0, 2t_0]$. On pose

$$M = \text{Sup} \{ |u(t)|; t \in [0, 2t_0] \}$$

$$M^* = \text{Sup} \{ |\Phi(t)|; t \in [0, 2t_0] \}.$$

Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que

$$|t - t_0| < \alpha \implies |U(t) - U(t_0)| \leq \varepsilon t_0 M^* + (t - t_0) M M^*.$$

(On pourra utiliser l'uniforme continuité de u .)

En déduire que U est continue à droite au point t_0 .

Montrer la continuité de U sur $\mathbb{R}^+$.

FIN DU PROBLÈME