

Devoir libre n°10
à rendre le 16/02/2018

Exercice : 1

1. Soit $\lambda > 0$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z'(t) = \lambda + z^2(t), \\ z(t_0) = \mu, \end{cases}$$

Préciser l'intervalle $]\alpha, \beta[$ de la solution maximale.

2. On considère une solution maximale φ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = x + y^2(t), \\ y(t_0) = v, \end{cases}$$

définie sur un intervalle $]\alpha, b[$.

- (a) On suppose $t_0 > 0$. Montrer que φ est strictement croissante sur $[t_0, b[$.
 (b) Montrer que si $t_0 > 0$ et $v > 0$, φ est strictement positive sur $[t_0, b[$.
 (c) Montrer que, sous les mêmes hypothèses, $b \in \mathbb{R}$ ($b \neq +\infty$) et $\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = +\infty$.

Exercice : 2

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}) \quad y''(x) = 6y^2(x) + x$.

1. (a) Démontrer que les solutions de cette équation sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
 (b) Déterminer une fonction $F : (x, Z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow F(x, Z) \in \mathbb{R}^2$, telle que, pour toute fonction numérique y , définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, y est solution de $(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $Y : x \in I \mapsto (y(x), y'(x))$ est solution de $Y'(x) = F(x, Y(x))$.
 Justifier que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) = 6y^2(x) + x, \\ y(x_0) = a, \\ y'(x_0) = b, \end{cases}$$

admet une solution maximale et une seule pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- (c) Donner un développement limité à l'ordre 4 de cette solution maximale.
 2. On se propose de déterminer d'éventuelles solutions développables en séries entières de ce problème de Cauchy. On notera

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- (a) Exprimer a_0, a_1, a_2, a_3 et la relation de récurrence liant les coefficients à partir d'un certain rang.
 (b) Écrire un programme Python permettant le calcul des coefficients a_n en fonction de a et b .
 (c) On note $M_n = \sup\{|a_k|/0 \leq k \leq n\}$. Montrer que, si $n \geq 2$, alors

$$M_{n+2} \leq \frac{1}{n+2} M_n^2.$$

En déduire que si $a = b = \frac{1}{2}$, alors la fonction y est définie sur un intervalle contenant $] -1, 1[$.

3. On suppose que y est une solution de $(\mathcal{E})$ de la forme $y(x) = \frac{\phi(x)}{(x-a)^q}$ sur $]\alpha, a[$ ou sur $]\alpha, \beta[$, $q \in \mathbb{N}^*$, ϕ ne s'annulant pas au voisinage de a . Que peut-on dire de q , et de ϕ ?

Fin de l'épreuve