

Devoir libre n°11
à rendre le 07/03/2018

Exercice :1

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Montrer que $|p(A \cap B) - p(A)p(B)| \leq \frac{1}{4}$.
Caractériser le cas d'égalité.

Exercice :2

Nous disposons d'une pièce faussée et deux dés équilibrés D_1 et D_2 .

La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$.

Les deux dés ont chacun 6 faces, le dé D_1 a 4 faces rouges et 2 blanches, le dé D_2 a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

- ◊ nous commençons par jeter la pièce,
- ◊ si nous obtenons pile, nous choisissons le dé D_1 , sinon nous choisissons le dé D_2 , choix définitif pour la suite de l'expérience,
- ◊ ensuite nous jetons plusieurs fois le dé choisi et pour chaque lancer, nous notons la couleur obtenue.

Nous nommons les événements suivants :

- ◊ D_1 est l'événement : « nous jouons avec le dé D_1 »,
- ◊ D_2 est l'événement : « nous jouons avec le dé D_2 »,
- ◊ pour tout entier naturel n , R_n est l'événement « nous avons obtenu une face rouge au n -ième lancer du dé choisi ».

1. Quelles sont les valeurs de $p(D_1)$? $p(D_2)$?

Montrer que $\{D_1, D_2\}$ constitue un système complet d'événements.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelles sont les valeurs de $p_{D_1}(R_n)$ et de $p_{D_2}(R_n)$?

3. Calculer $p(R_1)$.

4. Établir un lien entre les probabilités $p_{D_1}(R_1)$, $p_{D_1}(R_2)$ et $p_{D_1}(R_1 \cap R_2)$. En déduire $p(R_1 \cap R_2)$.

5. Montre que pour tout entier naturel non nul n :

$$p(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $p_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(R_{n+1})$.

6. Calculer $p_{R_1 \cap R_2}(D_1)$, puis de manière générale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$p_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, après n lancers ayant tous amené la face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait que le dé est le dé D_1 ou sur le fait d'avoir une face rouge au lancer suivant ?

• • • • •