DEVOIR LIBRE n°1

À rendre le : 21/09/2018

$\mathbb{R}$ est le corps des réels, n un entier naturel donné, $n \geq 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices carrées d'ordre n inversibles. On note I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}^2$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la i -ième ligne et j -ième colonne valant 1.

On appelle matrice de transvection toute matrice de type $(I_n + \lambda E_{ij})$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \neq j$.

Partie I

- 1a.** Calculer les produits $E_{i,j}E_{h,k}$ pour $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$.

1b. Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$?

1c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$, calculer $\det(I_n + \lambda E_{i,j})$.

1d. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$, avec $i \neq j, h \neq k, j \neq h$. Calculer $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $I_n + \lambda E_{i,j}$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2a. Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.

2b. Établir un résultat analogue sur les colonnes.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la première ligne de A ou sa première colonne possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$ pour $2 \leq i \leq n$.

indication : On pourra envisager les cas suivants :

  - $a_{1,1} = 1$;
  - $\exists i > 1, a_{i,1} \neq 0$ ou $a_{1,i} \neq 0$;
  - $a_{1,1} \neq 1$ et $\forall i > 1, a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et r son rang, supposé strictement positif. Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que :

  - $b_{i,i} = 1$ si $1 \leq i < r$;
  - $b_{i,i} = 0$ si $r < i \leq n$;
  - $b_{r,r} = d$ avec $d = 1$ si $r < n$ et $d = \det A$ si $r = n$.

indication : Faire une démonstration par récurrence en commençant par le cas où $n = 2$.
- Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 est engendré par les matrices de transvection.
- On suppose dans cette question seulement que $n \geq 3$. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

  - $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(A)f(B)$;

ii) Pour toute matrice diagonale A , $f(A)$ est égal au produit des coefficients de la diagonale.

6a. Montrer que toute matrice $I_n + aE_{\alpha,\beta}$, $\alpha \neq \beta$, peut s'écrire sous la forme :

$$I_n + aE_{\alpha,\beta} = (I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k})(I_n + \lambda E_{i,j})^{-1}(I_n + \mu E_{h,k})^{-1},$$

expression dans laquelle on précisera les valeurs de λ, μ, i, j, h, k , avec $i \neq j, h \neq k$.

6b. Calculer $f(A)$ si A est une matrice de transvection.

6c. Calculer $f(A)$ si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie II

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M , la somme des éléments de la diagonale de la matrice M .

1. Vérifier que $M \mapsto \text{Tr}(M)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

2. Soit σ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sigma(AB) = \sigma(BA).$$

2a. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.

2b. Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

2c. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sigma(M) = \lambda \text{Tr}(M).$$

3. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par les matrices de la forme $AB - BA$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $\mathcal{H} = \mathbb{R}I_n$.

Montrer que $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

4. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $F_{i,j} = I_n + E_{i,j}$. Calculer pour $i, j, h, k \in \{1, \dots, n\}$, $h \neq k$, le produit matriciel $F_{h,k}^{-1}F_{i,j}F_{h,k}$.

5. Soit θ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), \theta(AB) = \theta(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \theta(M) = \lambda \text{Tr}(M).$$

FIN DE L'ÉPREUVE