DEVOIR LIBRE n°3

À rendre le : 12/10/2018

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer que, pour tout x de E , $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f .
4. En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ forme une base de E . Quelle est la matrice de f dans cette base?

Problème

Dans tout le problème, on notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle trace de M (que l'on note $\text{Tr}(M)$ le complexe :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

1. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs complexes qui à toute A associe sa trace. Montrer que f est une application linéaire. En déduire que

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Vect}(I_n).$$

2. **2a.** Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, on a :

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

2b. En déduire que deux matrices semblables ont même trace. On peut aussi définir la trace d'un endomorphisme comme la trace d'une matrice associée à cet endomorphisme dans une base quelconque.

2c. Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'équation $AX - XA = I_n$, où A est un élément donné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X la matrice inconnue.

3. Soit g une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie $g(AB) = g(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ tel que $g = \lambda f$. (on pourra utiliser la base canonique $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.)
4. **4a.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note Φ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\Phi_A(M) = \text{Tr}(AM).$$

Montrer que l'application Θ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\Theta(A) = \Phi_A$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4b. Montrer que

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) / \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), MA = AM\} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

4c. En déduire une nouvelle démonstration de la question 3.

5. Rappel : toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire ayant sur la diagonale ses valeurs propres.

On suppose dans cette question $n = 4$.

5a. Soient A et B deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ vérifiant

$$A^2 = B^2 = I, \quad AB = -BA.$$

Montrer que $\text{Tr}(A) = 0$ (on pourra étudier $\text{Tr}(BAB)$). Quelle est la valeur de $\text{Tr}(B)$?

5b. Trouver les valeurs propres de A et B .

5c. Montrer que les deux matrices A et B sont diagonalisables.

5d. Montrer que la matrice B est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $C \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Les matrices A et B peuvent-elles être diagonalisables dans une même base ?

6. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p > 0$ tel que $N^p = 0$.

6a. Montrer que pour tout j entier naturel, $\text{Tr}(N^j) = 0$.

6b. Réciproquement, soit N une matrice telle que $\text{Tr}(N^j) = 0$, pour tout j entier naturel. Montrer que la matrice N est nilpotente. (on pourra utiliser une matrice de Van der Monde).

6c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = A.$$

Exprimer $A^k B - BA^k$ en fonction de A . En déduire que la matrice A est nilpotente.

6d. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A(AB - BA) = (AB - BA)A$$

Montrer que $AB - BA$ est nilpotente.

FIN DE L'ÉPREUVE