Devoir libre $n^\circ 5$

À rendre le : 12/11/2018

Théorème du point fixe et applications

1. Théorème du point fixe. Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et f une application de A dans A telle qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout couple (x,y) de A^2 :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Montrer que f admet un point fixe $a \in A$ et un seul, qui est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

(*Indication : montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy*).

2. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse A complète est nécessaire.

3. A étant toujours une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et f une application de A dans A. Montrer que si une puissance positive $f^q(= \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{q fois})$ de f est contractante, alors f possède un point fixe et un seul. Montrer également que toute suite récurrente du type $x_{n+1} = f(x_n)$, de terme initial $x_0 \in A$ converge vers le point fixe de f.

4. Applications :

4a. On définit la suite de Fibonacci par la relation de récurrence : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On s'intéresse à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation explicite : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$ (nombre d'or).

4b. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un triangle ABC avec B et C sur l'axe des abscisses.
Soit M un point de l'axe des abscisses. On note :

- P_M le projeté orthogonal de M sur (CA) ;
- Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
- R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC).

On obtient donc une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M. On appelle a, b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

i. Pour M et M' points distincts de (BC), justifier l'égalité (lorsque $M \neq C$) :

$$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

ii. Démontrer que φ admet un point fixe unique. Que peut-on en déduire ?

4c. Montrer que l'équation différentielle $y' = \sin(xy)$ avec la condition initaile $y(0) = 1$ admet une solution unique dans $(\mathscr{C}^1([0,1]),\mathbb{R})$. (*Indication : considérer l'application* $f \mapsto T(f)$ *telle que* $\forall x \in [0,1],\ \ T(f)(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \sin(tf(t))\mathrm{d}t$.)

5. Soit $E = (\mathscr{C}^1([0,1]),\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ qui est point fixe de l'opérateur T donné par

$$Tf(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\mathrm{d}t$$

On pourra commencer par établir que $T^2 = T \circ T$ est une contraction. Utiliser ceci pour établir l'existence d'une fonction unique $f \in E$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$.

6. Soit $(E, \|.\|)$ un espace complet et u un endomorphisme continu de E tel que $|||u||| < 1$. Montrer que $Id_E - u$ est inversible dans E.

Ouverts-fermés d'un connexe par arcs

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie connexe par arcs de E, P un ouvert-fermé de A non vide et $a \in P$, $b \in A$. Soit

$$\gamma : \begin{array}{ll} [0,1] & \longrightarrow E \\ t & \longmapsto \gamma(t) \end{array}$$

avec γ est continue, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ et $\gamma([0,1]) \subset A$.
On note $X = \{t \in [0,1] / \gamma(t) \in P\}$ et $\alpha = \sup(X)$.

1. Vérifier que α est bien défini et que $\alpha \in X$. Montrer que $\alpha = 1$. En déduire que $P = A$.

2. Quelles sont les ouverts-fermés de A.

3. Quelles sont les ouverts-fermés de E.

Fin de l'épreuve