DEVOIR LIBRE n°6

À rendre le : 06/12/2018

Problème

À toute suite de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$$

L'objet de ce problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Partie I : Étude de deux exemples

1. Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.

1a. Expliciter $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1b. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

1c. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

2a. Exprimer a_n^* en fonction de z et n .

2b. On suppose que $|z| < 1$.

i) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

On redémontrera le résultat de cours.

ii) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

2c. On suppose que $|z| \geq 1$.

i) Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$?

ii) Quelle est la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ si $z = -2$?

iii) On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ est convergente.

Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles.

1. Comparaison des convergences des deux suites.

1a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k fixé, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

i) Justifier que $\mathbb{C}_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \mathbb{C}_n^k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1b. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et n_0 un entier naturel fixé. On considère pour $n > n_0$, la somme

$$S_{n_0}(n) = \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{C}_n^k \frac{a^k}{2^n}.$$

Quelle est la limite de $S_{n_0}(n)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

1c. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser la définition de la limite.

1d. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

1e. La convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle équivalente à la convergence de la suite $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$?

2. Comparaison des convergences des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$ et $U_n = 2^n T_n$.

2a. Pour $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k .

2b. Montrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_{n+1}^{k+1} S_k.$$

on pourra remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$.

3. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $v_k = S_{k-1}$ et $v_0 = S_{-1} = 0$.

3a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n-1} = 2^n v_n^*$.

3b. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

4. La convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$?

FIN DE L'ÉPREUVE