Devoir libre $n^\circ 8$

À rendre le : 25/01/2019

Exercice n° 1

Dans tout l'exercice α désigne un réel strictement supérieur à 1.

1. Soit un entier n strictement positif.
   a) Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha)^n}\mathrm{d}t$.
   b) En effectuant le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ dans l'intégrale I_n, montrer que l'application $u \longmapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u$ en fonction de l'intégrale I_n.
   c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \geqslant 0, \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geqslant 1+u.$$
2. Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$ pour $u \geqslant 0$.
3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la suite (v_n) par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{(1+\frac{u}{n})^n}\mathrm{d}u.$$
   a) Montrer, en justifiant avec soin, que la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers plus l'infini est égale à $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ où $\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\mathrm{d}u$.
   b) En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers plus l'infini.
4. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} I_n x^n$ où I_n est la suite définie à la question 1.
   b) Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| < R$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer, en précisant avec soin le théorème utilisé, que :
   $$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\mathrm{d}t \quad \text{pour} \quad |x| < R.$$

Exercice n° 2

On considère l'intégrale suivante, où n est un entier positif et x réel :

$$I(n,x) = \int_0^{2\pi} \sin^n(t) e^{ixt}\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $I(0,x)$ et $I(1,x)$.

2. Prouver la relation suivante :

$$\left[(n+2)^2 - x^2\right] I(n+2,x) = (n+1)(n+2)I(n,x).$$

3. Pour x entier, calculer directement $I(n,x)$ en utilisant la relation :

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

4. Soit x un nombre réel, on considère la fonction f_x de la variable complexe z définie par la formule suivante :

$$f_x(z) = \int_0^{2\pi} e^{i(z\sin(t)+xt)}\mathrm{d}t.$$

Développer $e^{i(z\sin(t)+xt)}$ en série entière suivant les puissance de z. En déduire un développement en série entière de $f_x(z)$.
Montrer que ce développement est valable pour toute valeur complexe de z.

5. On pose :

$$D_x f_x = \frac{d^2 f_x}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{df_x}{dz} + \left(1 - \frac{x^2}{z^2}\right) f_x.$$

Montrer que $D_x f_x$ est une fonction élémentaire de z et x que l'on calculera. Montrer, en particulier, que $D_x f_x = 0$ lorsque x est entier.

Fin de l'épreuve

Cpge Kénitra
Prof : Mohamed TARQI