MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 18/19

Devoir libre $n^\circ 9$

À rendre le : 08/02/2019

Exercice I

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour tout entier $m \leqslant n$, on note A_m l'événement « m divise x ». On note également B l'événement « x est premier avec n ». Enfin, on note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k}.

2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.

3. Montrer que les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.

4. En déduire la probabilité de B.

5. Application : on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que

$$\varphi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice II

Un concours de tir au pistolet entre deux compétiteurs A et B est constitué d'une suite d'épreuves consistant, pour chacun des compétiteurs, en un tir visant à atteindre une cible. Les deux compétiteurs tiret simultanément, chacun d'eux disposant de sa cible personnelle. On associe à ce concours une expérience aléatoire.

On suppose que toutes les épreuves sont mutuellement indépendantes et que pour chaque épreuve :

- le compétiteur A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible ;
- le compétiteur B a la probabilité $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible ;
- les résultats obtenus par A et B sont indépendants.

À l'issue de chaque épreuve, il faut avoir touché sa cible pour être autorisé à poursuivre le concours, sinon on est éliminé.

Le concours cesse lorsque les deux compétiteurs ont été éliminés.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère les événements suivants :

- ⋄ A_n « à l'issue de l'épreuve n, seul A n'est pas éliminé » ;
- ⋄ B_n « à l'issue de l'épreuve n, seul B n'est pas éliminé » ;
- ⋄ C_n « à l'issue de l'épreuve n, aucun compétiteur n'est éliminé » ;
- ⋄ D_n « à l'issue de l'épreuve n, les deux compétiteurs sont éliminés » ;

C_0 est l'événement certain et A_0, B_0, C_0 sont impossibles.

1. Calculer les les probabilités suivantes :

$$\begin{cases} p(A_{n+1}|A_n),\ p(B_{n+1}|A_n),\ p(C_{n+1}|A_n),\ p(D_{n+1}|A_n), \\ p(A_{n+1}|B_n),\ p(B_{n+1}|B_n),\ p(C_{n+1}|B_n),\ p(D_{n+1}|B_n), \\ p(A_{n+1}|C_n),\ p(B_{n+1}|C_n),\ p(C_{n+1}|C_n),\ p(D_{n+1}|C_n). \end{cases}$$

2. On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve à l'issue de laquelle a lieu la première élimination.

2*a*. Calculer $p(X=1)$.

On suppose dans les questions suivantes que $n \geqslant 2$.

2*b*. Calculer $p\left(\bigcap_{k=1}^{n} C_k\right)$.

2*c*. Calculer $p(X>n)$. En déduire $p(X=n)$.

2*d*. Calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p(X=k)$.

2*e*. Montrer que $np(X>n) + \sum_{k=1}^{n} kp(X=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p(X>k)$.

2*f*. En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \\ p(D_n) \end{pmatrix}$ et $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est la matrice de transition définie par $X_{n+1} = AX_n$.

3*a*. Déterminer A.

3*b*. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

3*c*. Calculer X_n en fonction de X_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3*d*. Calculer $\lim_{n\to\infty} X_n$.

• • • • • • • • • • •