Devoir libre $n^\circ 10$

À rendre le : 25/02/2019

$\mathscr{P}_d$ désigne l'espace vectoriel formée des fonctions polynômes de degré au plus d ($d \in \mathbb{N}$ fixé).
Pour tout polynôme $P \in \mathscr{P}_d$ et tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k(P) = \int_0^1 t^k P(t)\mathrm{d}t.$$

Partie I : Questions préliminaires

1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n($n \in \mathbb{N}^*$). Notons $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires de E. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, e_i^* la forme linéaire sur E définie de la façon suivante :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad e_i^*(e_j) = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ le symbole de Kronecker.

1a. Montrer que $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une famille libre de E^*.

1b. Soit $x \in E$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, montrer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $e_j^*(x) = x_j$.

1c. En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une famille génératrice de E^*. *La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ forme donc une base de l'espace dual E^*, appelée la base duale de $\mathscr{B}$.*

1d. En déduire la dimension de E^*.

2. Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)$ une famille de r formes linéaires linéairement indépendantes d'un espace vectoriel E de dimension n.
Montrer $\dim \displaystyle\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_i) = n - r$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H_n la matrice $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

3a. Exprimer ${}^t X H_n X$ à l'aide d'une intégrale (on pourra remarquer que $\dfrac{1}{i+j-1} = \displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\mathrm{d}t$).

3b. En déduire que la matrice H_n est inversible.

Partie II : Étude d'un endomorphisme symétrique

1. Montrer que l'application

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t,$$

munit $\mathscr{P}_d$ d'une structure d'espace euclidien.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $I_k : P \mapsto I_k(P)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{P}_d$.

3. Montrer que la famille $(I_k)_{0 \leqslant k \leqslant d}$ forme une base $\mathscr{B}$ du dual de $\mathscr{P}_d$,

4. Écrire la matrice de passage A de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$, où $\mathscr{B}_0$ est la base duale de la base canonique de $\mathscr{P}_d$.

5. On considère l'application h qui, à tout $P \in \mathscr{P}_d$, fait correspondre le polynôme $h(P)$ défini par

$$[h(P)](t) = \sum_{k=0}^{d} I_k(P) t^k .$$

Montrer que h est un automorphisme de $\mathscr{P}_d$.
Quelle est la matrice de h dans la base canonique de $\mathscr{P}_d$.

6. P et Q étant deux éléments de $\mathscr{P}_d$, calculer $(P|h(Q))$.
En déduire que la matrice A admet (en les comptant avec leur ordre de multiplicité) $d + 1$ valeurs propres réelles strictement positives.

•••••••••••