Devoir libre $n°11$

À rendre le : 08/03/2019

•••••••••••

Le but de cet exercice est de prouver l'existence et de donner la valeur (par deux méthodes différentes) de :

$$\Delta = \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$$

Partie 1 : méthode utilisant un produit scalaire

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3 et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les deux polynômes 1 et X.

1) a) Rappeler pourquoi, pour tout entier naturel k, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,dt$ converge.

b) Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de E, associe $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,dt$ est un produit scalaire sur E, dont la norme associée sera notée $\|\ \|$.

2) Soit Q un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels. Donner, sous forme d'intégrale, l'expression de $\|X^3 - Q\|^2$.

3) a) Énoncer le théorème qui assure l'existence et l'unicité du polynôme Q_0 de F qui rend $\|X^3 - Q\|^2$ minimale.

b) En déduire sans calcul les valeurs de $\langle X^3 - Q_0, 1\rangle$ et $\langle X^3 - Q_0, X\rangle$.

c) En notant $Q_0 = x_0 X + y_0$, écrire le système que doit vérifier le couple $(x_0,\ y_0)$ pour que $\int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$ soit minimale.

d) Déterminer la valeur de Δ.

Partie 2 : méthode utilisant une fonction de deux variables

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x,y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t}\,dt$$

4) Écrire $f(x,y)$ comme une fonction polynomiale des deux variables x et y.

5) Déterminer le seul point critique (x_0, y_0) de f sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

6) Montrer que f admet en (x_0, y_0) un minimum local m que l'on calculera.

7) Établir que ce minimum est global.

•••••••••••