

DEVOIR LIBRE n°1

À rendre le : 21/09/2018

Exercice 1 (Théorème de Lagrange)

Soit $(G, .)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G .

1. Montrer que pour tout $a \in G$, H et $aH = \{ah/h \in H\}$ ont le même nombre d'éléments.
2. Soient $a, b \in G$. Démontrer que $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$.
3. En déduire que le cardinal de H divise le cardinal de G .

Exercice 2

Soit $A = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx), n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Soit $f \in A$. Calculer $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$ en fonction des a_k .
3. En déduire que A est intègre.
4. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow A \\ P &\longmapsto P(\cos(x)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme d'anneaux. En déduire la forme générale des idéaux de A .

Exercice 3

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, qui sont inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

1. Démontrer que si M est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, alors $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $n \geq 0$ un entier fixé. On suppose que $B(0) \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un couple (Q_n, S_n) unique de polynômes vérifiant la double condition :

$$A = BQ_n + X^{n+1}S_n$$

et

$$\deg Q_n \leq n.$$

2. Décomposer en éléments simples la fraction : $F = \frac{1+X}{X^3(1+X^2)}$.

Exercice 5

On considère $\mathbb{R}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$. Soit $\alpha = \sqrt[3]{2}$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$).

1. Montrer que les nombres $1, \alpha, \alpha^2$ sont linéairement indépendants. En utilisant $\alpha^3 = 2$, on montrera que toute relation de dépendance linéaire entraînerait que α soit rationnel.
2. Montrer que le sous-espace vectoriel L de $\mathbb{R}$ engendré par $1, \alpha, \alpha^2$ est un sous-anneau intègre de $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in L^*$. Montrer que l'application de L dans lui-même qui à y associe xy est une bijection. En déduire que L est un corps. Donner l'expression de l'inverse de $x \neq 0$

FIN DE L'ÉPREUVE