

DEVOIR LIBRE $n^{\circ}2$

À rendre le : 14/10/2018

Une description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Notations et définitions

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On appelle hyperplan de $\mathbb{R}^n$ tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ ayant pour dimension $n - 1$.
On rappelle qu'une *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble de toutes les formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ est donc $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On le note E^* .

Partie A : Description des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

1. **1a.** Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. On pose $a_i = f(e_i) \in \mathbb{R}$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

- 1b.** Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $f_1(e_i) = f_2(e_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que :

$$f_1 = f_2.$$

2. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

- 2a.** Démontrer que f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

- 2b.** Calculer $f(e_i)$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

3. Justifier le résultat suivant.

$$E^* = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{array} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

4. Soit

$$\varphi : E^* \rightarrow \mathbb{R}^n, f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)).$$

Démontrer que φ est un isomorphisme.

5. En déduire la dimension de E^* .

6. Donner :

- 6a.** un exemple de forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$;

- 6b.** un exemple de forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^7$.

Partie B : Hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

1. Soit f une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$f \neq 0 \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^n.$$

2. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Soit H' un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$.

- 2a.** Justifier qu'il existe un isomorphisme $\phi : H' \rightarrow \mathbb{R}$.

- 2b.** Montrer qu'il existe $f \in E^*$ tel que : $H = \text{Ker}(f)$.

3. Dédire des questions 1 et 2 le résultat suivant :

Le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ non nulle est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

4. Soit

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = x_3 - x_4\}.$$

4a. Donner une forme linéaire f sur $\mathbb{R}^4$ dont H est le noyau.

4b. Montrer que f est non nulle.

4c. En déduire un résultat sur la structure de H .

Partie C : Équations d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Prouver que

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que H est l'ensemble solution de l'équation

$$(E) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire

$$H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

Une telle équation (E) est appelée *équation de l'hyperplan H* .

3. Écrire un énoncé qui rassemble les résultats des questions 1 et 2, de manière analogue à ce qui a été fait dans les parties A et B.
4. Soient f et g deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$, toutes deux non nulles, et ayant même noyau. Soit l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$

$$H = \text{Ker}(f) = \text{Ker}(g).$$

Soit $(u_1, \dots, u_{n-1})$ une base de H .

4a. Justifier qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_{n-1}, e_i)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4b. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées $(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ dans la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$f(u) = zf(e_i) \text{ et } g(u) = zg(e_i).$$

4c. Justifier que $f(e_i) \in \mathbb{R}^*$ et $g(e_i) \in \mathbb{R}^*$.

4d. Dédire des résultats précédents qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$g = \lambda f.$$

5. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que

$$(E) : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

est une équation de H . Soit $(a'_1, \dots, a'_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On note (E') l'équation définie par :

$$(E') : a'_1x_1 + \dots + a'_nx_n = 0.$$

Montrer l'équivalence :

$$(E') \text{ est une équation de } H \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, (a'_1, \dots, a'_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n).$$

6. Soient $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1, 0)$. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 .

6a. Démontrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

6b. Déterminer une équation de H .

6c. Déterminer toutes les équations de H .

Partie D : Intersection d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$

1. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$.

1a. Démontrer l'équivalence :

$$H_1 = H_2 \Leftrightarrow \dim(H_1 \cap H_2) = n - 1.$$

1b. Montrer que :

$$n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1.$$

1c. Que dire de $\dim(H_1 \cap H_2)$ si $H_1 \neq H_2$?

2. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, pour tout $(H_1, \dots, H_p)$ p -uplet d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$:

$$n - p \leq \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \leq n - 1.$$

3. Le résultat de la question 3 a été établi pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Expliquer pourquoi ce résultat n'est pas pertinent lorsque l'entier p est « assez grand ». Dans la réponse, on précisera (bien sûr) quel sens il convient de donner à « assez grand » dans ce contexte.

4. Si H_1, H_2, H_3 sont trois hyperplans de $\mathbb{R}^3$, alors le résultat de la question 3 nous livre :

$$\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) \in \{0, 1, 2\}.$$

4a. Donner trois hyperplans H_1, H_2, H_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 2$. Commenter.

4b. Donner trois hyperplans H_1, H_2, H_3 de $\mathbb{R}^3$, deux à deux distincts, tels que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1$. Proposer une explication géométrique du fait que la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ est 1.

4c. Donner trois hyperplans H_1, H_2, H_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 0$. Proposer une explication géométrique du fait que l'intersection $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ est réduite au singleton $\{(0, 0, 0)\}$.

Partie E : Ensemble solution d'un système linéaire homogène (SLH) d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On note (S) le système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$ associé à A :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit F l'ensemble solution de (S) .

1a. Définir p formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que :

$$F = \text{Ker}(f_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(f_p).$$

1b. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On demande ici de redémontrer ce résultat du cours, en s'appuyant sur la question précédente.

1c. i) Soit f la forme linéaire nulle sur $\mathbb{R}^n$. Que vaut $\text{Ker}(f)$?

ii) À l'aide de la question précédente et de la partie D, prouver que :

$$n - p \leq \dim(F) \leq n.$$

2. Soit (S) le système linéaire homogène d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Soit F l'ensemble solution de (S) .

2a. Expliciter le système (S) .

2b. Donner un encadrement de la dimension de F , sans résoudre (S) .

2c. Déterminer une base de F .

2d. Préciser la dimension de F .

Partie F : Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble solution d'un (SLH) d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$

1. On considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ non trivial (c'est-à-dire distinct du singleton $\{(0, \dots, 0)\}$ et de $\mathbb{R}^n$).

1a. Soit p la dimension de F . Justifier que $1 \leq p \leq n-1$.

1b. i) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F . Justifier qu'il existe $(i_1, \dots, i_{n-p}) \in \llbracket 1, n \rrbracket^{n-p}$ tel que

$$\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$$

est une base de $\mathbb{R}^n$.

ii) Soit $k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$. La famille $\mathcal{C}$ étant une base de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique forme linéaire g_k sur $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\begin{cases} g_k(u_l) = 0, \text{ pour tout } l \in \llbracket 1, p \rrbracket; \\ g_k(e_{i_{k'}}) = 0, \text{ pour tout } k' \in \llbracket 1, n-p \rrbracket \setminus \{k\}; \\ g_k(e_{i_k}) = 1. \end{cases}$$

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-p})$ dans la base $\mathcal{C}$. Montrer que :

$$g_k(u) = z_k.$$

1c. i) Soit $u \in \mathbb{R}^n$, de coordonnées $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-p})$ dans la base $\mathcal{C}$. Montrer que :

$$u \in F \Leftrightarrow z_1 = \dots = z_{n-p} = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(g_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(g_{n-p}).$$

ii) Qu'en déduire quant aux ensembles F et $\text{Ker}(g_1) \cap \dots \cap \text{Ker}(g_{n-p})$?

1d. Prouver que F est l'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$, possédant $n-p$ lignes.

2. Soient $u_1 = (1, 2, 2, 2, 1)$ et $u_2 = (3, 1, 1, 1, 3)$. Soit $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$.

2a. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F .

2b. Donner un système linéaire homogène (S) d'inconnue dans $\mathbb{R}^5$ dont F est l'ensemble solution.

Partie G : Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Démontrer l'assertion suivante.

L'ensemble solution d'un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors il existe un système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$ dont F est l'ensemble solution.

FIN DE L'ÉPREUVE