DEVOIR LIBRE n°3

À rendre le : 28/10/2019

Commutant et décomposition de Dunford d'un endomorphisme

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E dont on suppose le polynôme caractéristique χ_u scindé sur $\mathbb{K}$, on pose :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

$$E_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E), \quad E'_{\lambda_i}(u) = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i}.$$

1. Montrer que $E'_{\lambda_i}(u)$ est un sous espace vectoriel stable par u , et que $E = \bigoplus_{i=1}^p E'_{\lambda_i}(u)$.

2. **2a.** On pose $v_i = u|_{E'_{\lambda_i}(u)}$.

Montrer que : $\chi_{v_i} = (X - \lambda_i)^{\dim(E'_{\lambda_i}(u))}$.

2b. En déduire que $\dim E'_{\lambda_i}(u) = m_i$.

Dans la suite on considère l'application :

$$\Gamma_u : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & v \circ u - u \circ v \end{array}$$

3. Montrer que $\Gamma_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

On note alors $\mathcal{C}(u) = \text{Ker}(\Gamma_u)$.

4. **4a.** Montrer que $\text{Vect}(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$; le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par les vecteurs u^k , $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, est inclus dans $\mathcal{C}(u)$ et que $\dim(\mathcal{C}(u)) \geq 2$.

4b. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$, alors $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$, $v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)$.

5. Dans cette question on suppose u diagonalisable.

5a. Montrer que $m_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

5b. Montrer que $\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)\}$.

5c. En déduire que $\mathcal{C}(u)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \mathcal{L}(E_{\lambda_2}(u)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}(u))$, et donner la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

6. Dans cette question, on suppose que : $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $m_i = 1$. Montrer que $\mathcal{C}(u) = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n-1})$.

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $v \in \mathcal{L}(E)$.

7a. Calculer $(\Gamma_u)^k(v)$.

7b. En déduire que si u est nilpotent, alors Γ_u est nilpotent.

8. 8a. Montrer que si $v \in \mathcal{C}(u)$ alors $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, v(E'_{\lambda_i}(u)) \subset E'_{\lambda_i}(u)$.

Dans la suite de la question on utilisera le fait que : $E = \bigoplus_{i=1}^p E'_{\lambda_i}(u)$.

8b. Montrer qu'il existe $\delta \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $\omega \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que :

$$u = \delta + \omega, \quad \delta \circ \omega = \omega \circ \delta$$

et

$$\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}(\delta) \cap \mathcal{C}(\omega).$$

8c. Exemple :

Donner la décomposition $\delta + \omega$ (matricielle) de l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculer alors A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

FIN DE L'ÉPREUVE