DEVOIR LIBRE n°4

À rendre le : 12/11/2019

Exercice I

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

1. Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \iff r \leq R$ et $\|a - b\| \leq R - r$.

Exercice II

1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.
2. Soit p, q deux normes sur $\mathbb{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que

$$B_q \subset B_p \iff p \leq q.$$

Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Exercice III

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) ; f(0) = 0\}$. On pose

$$\|f\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) + f'(x)|, \text{ et } N(f) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

Montrer que ce sont deux normes équivalentes sur E .

Exercice IV

1. Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbb{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :
(i) $\sup(A + B)$, (ii) $\sup(A \cup B)$, (iii) $\sup(A \cap B)$, (iv) $\inf(A \cup B)$, (v) $\inf(A \cap B)$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Trouver $d(0, \mathbb{R} - \mathbb{Q})$, $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$, $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a, b, c) .
3. Pour $A, B \subset \mathbb{R}^n$ on définit $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$. Trouver $d(A, B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy = 1\}$ et B une asymptote.
4. On définit $\text{diam} A = \sup_{a, b \in A} \|a - b\|$. Quel est $\text{diam}([0, 1] \cap \mathbb{Q})$? $\text{diam}([0, 1] \cap \mathbb{R} - \mathbb{Q})$?

Exercice V

On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Remarquer que D est stable par addition et multiplication.
2. Posons $u = \sqrt{2} - 1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geq 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.
 En déduire le résultat.

Problème

Dans ce problème $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \underbrace{u_{2^n} + \dots + u_{2^n}}_{2^n \text{ termes}}$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

On fera attention aux indices de départs de sommation dans S_n et T_n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien y a-t-il d'entiers i vérifiant : $2^n \leq i \leq 2^{n+1} - 1$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \geq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n \geq S_{2^{n+1}-1}.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} v_{n+1} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

On pourra commencer par écrire $\frac{1}{2} v_{n+1} = 2^n u_{2^{n+1}}$.

5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2} T_n \leq \frac{1}{2} u_1 + S_{2^n-1}.$$

6. A l'aide de 3) et 5), montrer alors que les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

7. Une première application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

7a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{(1-\alpha)n}$.

7b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} v_n$ converge.

7c. A l'aide de 6), quel théorème important du cours a-t-on prouvé?

On pourra traiter séparément les cas $\alpha \leq 0$ et $\alpha > 0$.

8. Une deuxième application : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on pose $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour tout entier $n \geq 2$.

8a. Calculer v_n pour tout entier $n \geq 2$.

8b. Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ converge.

8c. Qu'a-t-on redémontré?

FIN DE L'ÉPREUVE