Devoir libre $n^\circ 6$

À rendre le : 16/12/2019

Commutativité des termes d'une série

L'objet de ce problème est de comparer la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et la série obtenue en sommant les termes de un dans un ordre différent, c'est-à-dire la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ où σ est une permutation de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).

Partie I : Cas d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes positifs, et soit σ une permutation de $\mathbb{N}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } S_n(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}.$$

1. On suppose dans un premier temps que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge

1*a*. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(n) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \sigma(k)$.

i) En comparant $S_{M(n)}$ et $S_n(\sigma)$, montrer que $(S_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

ii) En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ converge.

1*b*. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

1*c*. En considérant σ^{-1}, en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$..

2. On suppose maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge. Montrer que $(S_n(\sigma))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majoré. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$?

3. Récapituler les résultats obtenus dans cette partie sous forme d'un théorème.

Partie II : Cas d'une série absolument convergente

On suppose maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente.

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente.

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{M(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{M(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}|.$$

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$.

Partie III : Contre-exemple dans le as d'une série semi- convergente

Dans cette partie, on étudie un contre-exemple dans le cas où la série n'est pas absolument convergente

1. Soit pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ est semi-convergente.

2. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n \geqslant 0$.

3. Justifier très soigneusement que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

4. Soit $\sigma : \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \longrightarrow \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ par

$$\begin{cases} \sigma(3n-1) = 2n, & \\ \sigma(3n) = 4n-1, & n \geqslant 1 \\ \sigma(3n+1) = 4n+1. & \end{cases}$$

Montrer que σ est une permutation de $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

5. Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $w_n = u_{\sigma(3n-1)} + u_{\sigma(3n)} + u_{\sigma(3n+1)}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n$ converge, et que sa somme est strictement négative.

6. Justifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} w_n$.

7. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} u_{\sigma(n)} \neq \sum_{n=2}^{\infty} u_n$. Conclusion ?

Fin de l'épreuve