

DEVOIR LIBRE n°7

À rendre le : 06/01/2020

Partie 1.

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2, \langle X, Y \rangle = {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $\|X\|$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ par la matrice :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A est une matrice orthogonale.
2. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. Vérifier que u est un endomorphisme continu de E et que : $\|u\| = 1$.
4. Soit w un endomorphisme de E . Prouver qu'il existe $X_0 \in E$ tel que $\|X_0\| = 1$ et $\|w\| = \|w(X_0)\|$.
5. On définit dans $\mathcal{L}(E)$ la suite (u^k) des endomorphismes itérés de u : $u^0 = id_E$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = u^{k-1} \circ u.$$

Prouver que la suite (u^k) est une suite bornée de $\mathcal{L}(E)$.

6. Soit v l'endomorphisme de E défini par : $v = id_E - u$.

6a. Déterminer $\text{Ker}(v)$.

6b. $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont-ils orthogonaux ?

6c. Prouver que $E = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v)$.

6d. En déduire que, pour tout $X \in E$, il existe $Z \in E$ et un unique $X_1 \in \text{Ker}(v)$ tels que :

$$X = X_1 + Z - u(Z)$$

6e. On pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*, p_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

Montrer que pour tout $X \in E$, la suite $(p_m(X))$ converge vers la projection de X sur $\text{Ker}(v)$ parallèlement à $\text{Im}(v)$.

Partie 2.

On prend dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel : $\forall (X, Y) \in E^2, \langle X, Y \rangle = {}^tXY$, la norme d'un vecteur quelconque X de E étant notée $\|X\|$ et soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E .

Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente dans la base $\mathcal{B}$ un endomorphisme u de E , on note $\|A\| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.

1. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Quelques propriétés de la matrice $B = {}^tAA$.
 - 2a. Montrer que B est une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Étudier le cas où $A \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$.
 - 2b. On note $\rho(B) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(B)\}$ où $\text{Sp}(B)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice B . Soit U une matrice semblable à B . A-t-on $\rho(U) = \rho(B)$?
 - 2c. Montrer que $\|A\|^2 \leq \rho(B)$.
 - 2d. Prouver enfin que $\|A\|^2 = \rho(B)$.
3. On suppose dans cette question que u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$.
 - 3a. Calculer $\|A\|$.
 - 3b. Dans quel cas la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée?
 - 3c. On suppose que $|\gamma| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} A^k$.
Expliciter pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P_m puis déterminer $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m$.
4. On suppose dans cette question que u est un endomorphisme de E symétrique et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de u , les λ_i étant distincts ou non.
 - 4a. Calculer $\|A\|$.
 - 4b. Dans quel cas la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée?
 - 4c. On suppose que : $\forall i \in \{1, \dots, n\}, |\lambda_i| < 1$ et on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} A^k$.
Calculer $\lim_{m \rightarrow +\infty} P_m$.

Partie 3.

On suppose dans cette partie que E est un espace vectoriel normé réel de dimension finie n , et que u est un endomorphisme continu de E tel que la suite des endomorphismes itérés $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|)$. On pose $v = \text{Id}_E - u$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k$.

1. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall X \in \text{Ker}(v), p_m(X) = X$.
2. Justifier le fait que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, p_m \circ v = v \circ p_m$. Exprimer l'endomorphisme $p_m \circ v$ en fonction de u .
3. Soit $X \in \text{Im}(v)$ fixé.
 - 3a. Déterminer en fonction de X , une constante positive K telle que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m(X)\| \leq \frac{K}{m} (1 + \|u^m\|).$$

- 3b. En déduire que la suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E .
4. Montrer alors que la somme $H = \text{Ker}(v) + \text{Im}(v)$ est directe c'est-à-dire que $H = \text{Ker}(v) \oplus \text{Im}(v)$.
5. Préciser H .
6. Prouver alors que la suite $(p_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur E vers le projecteur p sur $\text{Ker } v$ parallèlement à $\text{Im } v$.

Partie 4.

On suppose dans cette partie que E est de dimension infinie. Soit u un endomorphisme continu de E tel que $\|u\| \leq 1$. **On garde les notations définies dans la partie 3.**

1. La suite des itérés de $u : (u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?

2. Prouver que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \|p_m\| \leq 1$.

3. On note $\overline{\text{Im } v}$ l'adhérence de $\text{Im}(v)$ et on prend $X \in \overline{\text{Im } v}$.

3a. Prouver que pour tout entier naturel m non nul et tout vecteur $T \in \text{Im}(v)$ tel que :

$$\|p_m(X)\| \leq \|p_m\| \cdot \|X - T\| + \|p_m(T)\|$$

3b. Démontrer que la suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0_E .

4. Prouver que la somme $H = \text{Ker}(v) + \overline{\text{Im } v}$ est directe.

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

5a. Démontrer que : $\forall m \in \mathbb{N}^*, \text{Im}(v)$ est stable par p_m .

5b. En déduire que $\overline{\text{Im } v}$ est aussi stable par p_m .

5c. Prouver enfin que H est stable par p_m .

6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note π_m la restriction de p_m à H et π le projecteur de H sur $\text{Ker}(v)$ parallèlement à $\overline{\text{Im } v}$.

6a. Prouver que la suite (p_m) converge simplement sur H vers π .

6b. Vérifier que : $\forall X \in H, \|\pi(X)\| \leq \|X\|$.

6c. En déduire que $\pi \in \mathcal{L}(E)$.

Partie 5.

On prend dans cette partie pour E l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées que l'on munit de la norme :

$$\forall X \in E, \|X\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

On considère alors l'application u de E qui à la suite $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associe la suite $Y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1}$.

1. Vérifier que u est un endomorphisme de E .

2. Prouver que $\|u\| = 1$.

3. Préciser $\text{Ker}(v)$ où $v = id_E - u$.

4. Montrer que $\text{Im}(v)$ est constitué des suites $X = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la suite $S = (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \text{ soit bornée.}$$

5. Peut-on construire un exemple tel que $X \in E$ et la suite $(p_m(X))_{m \in \mathbb{N}^*}$ diverge ?

FIN DE L'ÉPREUVE