# Devoir libre $n^\circ 8$

À rendre le : 31/01/2020

### Exercice 1

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $E = \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$ et $\mathscr{U}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de terme dominant égal à $X^n$.
On définit la fonction $G_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall \in \mathbb{R},\ \ G_n(t) = (-1)^n e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$$

où $t \mapsto \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(e^{\frac{-t^2}{2}})$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $t \mapsto e^{\frac{-t^2}{2}}$.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} (.|.): & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & (P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de ce produit scalaire.
2. Montrer que $G_n$ est un élément de $\mathscr{U}$. On notera par la suite $F = X^n - G_n(X)$.
3. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, calculer $(G_n|X^j)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.
4. Montrer que le polynôme $F$ est le projeté orthogonal du polynôme $X^n$ sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.
5. En déduire, en fonction de $n$ la valeur de $\displaystyle\inf_{P \in \mathscr{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

### Exercice 2

Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels avec $p \leqslant n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang $p$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**1.** Démontrer qu'il existe une unique matrice $X_0$ de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|,\ \ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$

**2.** Montrer que $X_0$ est l'unique solution de l'équation

$$A^tAX = A^tB.$$

**3.** *Application* : déterminer

$$\inf\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2,\ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Fin de l'épreuve