

DEVOIR LIBRE n°9

À rendre le : 10/02/2020

Exercice I

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}.$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$.

2. Étudier les variations de la fonction u_n sur $\mathbb{R}$.

Que peut-on conclure pour la convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$?

La fonction somme S de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ est-elle continue ?

3. Montrer que S est dérivable en tout point $x \neq 0$.

4. n étant un entier supérieure ou égal à 1, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x).$$

4a. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ (dépendant de n) tel que, pour $0 < |x| < \alpha$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_n(x)}{x} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

4b. En déduire la limite en 0 de $\frac{S(x)}{x}$.

4c. S est-elle dérivable en 0 ?

Exercice II

1. Retrouver rapidement l'existence de

$$\gamma = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^p \frac{1}{n} - \ln(p) \right)$$

et montrer que γ peut également s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right].$$

2. Soit $x \in [0, 1]$, établir :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^p (-1)^k t^k + (-1)^{p+1} \frac{t^{p+1}}{1+t}.$$

En déduire :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

3. Montrer que γ peut encore s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{kn^k}.$$

La fin du problème s'attache à intervertir les deux sommations ci-dessus.

4. Pour $x \in [1, +\infty[$, on note $E(x)$ la partie entière de x et l'on pose

$$\forall k \geq 2, \quad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{1}{n^k}.$$

4a. Montrer que la fonction $\zeta : \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$. Montrer que, pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la suite $(|f_k(x)|)_{k \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant.

4b. En déduire que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} f_k$ est uniformément convergente sur $[1, +\infty[$.

5. Montrer que :

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x).$$

En déduire enfin que :

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

FIN DE L'ÉPREUVE