Devoir libre $n^\circ 10$

À rendre le : 06/03/2020

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée. Au cours de ces tirages, on définit le nombre R de répétitions de la manière suivante : au début, $R = 0$. Ensuite, on ajoute 1 à R dès que l'on obtient une boule numérotée qui avait été déjà tirée précédemment.

1. Déterminer les probabilités des événements suivants :
- A_1 = "la première boule tirée est la boule numéro 1".
- A_2 = "la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1".
- A_3 = "la première boule tirée est une boule blue".

2. On note A_0 l'événement " la boule numéro 1 n'est jamais tirée lors du jeu". En utilisant la formule des probabilités totales avec les événements précédents, montrer que $p(A_0) = \dfrac{k}{k+1}$.

3. On note X le nombre de fois où l'on a tiré la boule 1 au cours du jeu. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question précédente, montrer que $E(X) = \dfrac{1}{k}$.

4. On définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = \begin{cases} X-1 & \text{si } X \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

(Y est donc le nombre de répétitions de la boule numéroté 1.)

Montrer que $E(Y) = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)p(X=m)$ puis que $E(Y) = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

Soit r un entier naturel. On recherche la valeur minimale de k (en fontion de n et r) de manière à ce que le nombre moyen t de répétitions soit inférieur ou égal à r.

5. Montrer que $t = nE(Y)$.

6. En déduire que la valeur minimale recherchée est $k_0 = \left\lceil \sqrt{\dfrac{n}{r} + \dfrac{1}{4}} - \dfrac{1}{2} \right\rceil$. (partie entière supérieure).

Fin de l'épreuve