MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 19/20

Devoir libre $n^\circ 11$

À rendre le : 23/03/2020

On note E l'ensemble des fonctions f réelles définies, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge absolument.
On vérifie que E est un espace vectoriel le corps des nombres réels et qu'il contient les fonctions continues et bornées sur $[0,+\infty[$.
Pour tout élément f de E on note $L(f)$ la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On vérifie aussi que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On admet que la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout entier naturel k et tout réel x strictement positif, on a :

$$L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que l'application linéaire $L : f \mapsto L(f)$ est injective, en utilisant un argument basé sur les probabilités. On considère un réel strictement positif x et une fonction f continue et bornée sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Ainsi f est un élément de E.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{T},p)$ suivant toutes la loi exponentielle de paramètre égal à $\dfrac{1}{x}$. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1*a*. Donner une densité de la variable aléatoire S_n.

1*b*. Donner une densité, qu'on notera φ_n, de la variable aléatoire $\dfrac{S_n}{n}$.

2. **2*a*.** Soit a un réel strictement positif. Prouver l'égalité ;

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > a\right) = 0.$$

2*b*. En utilisant la continuité de la fonction f en x, pour tout réel ε strictement positif, justifier l'existence d'un réel a strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \Rightarrow \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > a\right).$$

2*c*. Soit ε un réel strictement positif. Prouver l'égalité :

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|>\varepsilon\right)=0.$$

3. On note M un majorant de $|f|$ sur $[0,+\infty[$.

3*a*. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement : $A_n=\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\varepsilon\right)$ et χ_{A_n} son indicatrice. Justifier l'inégalité suivante entre variables aléatoires :

$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant \varepsilon\chi_{A_n}+2M(1-\chi_{A_n}).$$

3*b*. En déduire l'égalité :

$$\lim_{n\to\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)=f(x).$$

$E(Y)$ désigne l'espérance mathématique d'une variable aléatoire Y.

4. **4*a*.** Déduire des questions précédentes l'égalité :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n-1)!x^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)e^{\frac{-nt}{x}}\,\mathrm{d}t,$$

puis l'égalité Formule d'inversion de Laplace :

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^n(L(f))^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right)}{x^n(n-1)!}.$$

4*b*. Montrer que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifiant $L(f)=L(g)$, alors f et g sont égales.

4*c*. Montrer, plus précisément, que si deux fonctions f et g continues et bornées sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vérifiant $L(f)(x)=L(g)(x)$ seulement pour tout x dans $]a,+\infty[$ sont égales.

Fin de l'épreuve