Devoir libre $n^\circ 2$

à rendre le 06/10/2020

Dans toute la suite n désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à deux, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à éléments réels à n lignes et n colonnes.
Lorsque A appartient $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note a_{ij} l'élément de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de sa structure d'algèbre sur $\mathbb{R}$ de dimension n^2. J désigne l'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à un. On considère le sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A telles que les $2n$ réels

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ \sum_{q=1}^{n} a_{iq},\quad (i,j)\in\{1,2,\dots,n\}^2$$

soient tous égaux. On note alors $d(A)$ leur valeur commune.

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que d est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

2. Montrer qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si il existe un réel λ tel que

$$AJ = JA = \lambda J.$$

3. ***3a.*** Montrer que $\mathscr{E}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que d est un homomorphisme d'anneaux.

3b. Montrer que si A est une matrice inversible appartenant à $\mathscr{E}$, $d(A)$ est non nul et A^{-1} appartient aussi à $\mathscr{E}$. Comparer $d(A^{-1})$ et $d(A)^{-1}$. Si $d(A)$ est non nul, A est-elle inversible ?

4. Soit A un élément de $\mathscr{E}$, on note $B = \dfrac{d(A)}{n}J$ et $C = A - B$.
Calculer BC et CB puis comparer A^p et $B^p + C^p$ pour tout entier naturel p.

5. Soit $\mathscr{F} = \{A \in \mathscr{E} / d(A) = 0\}$ et $\mathscr{G} = \{A = \lambda J / \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{E}$.

6. r et s sont des entiers compris entre 2 et n (au sens large). $T_{r,s}$ désigne la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf quatre

$$t_{11} = t_{rs} = 1 \quad \text{et} \quad t_{1s} = t_{r1} = -1$$

6a. Montrer que l'ensemble $\mathscr{T} = \{T_{r,s} / (r,s) \in \{2,3,\dots,n\}^2\}$ constitue une base de $\mathscr{F}$.

6b. En déduire quelles sont les dimensions de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{E}$.

Fin de l'épreuve