Devoir libre $n^\circ 3$

à rendre le 16/10/2020

Exercice 1

(Les questions suivantes sont indépendantes)

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels et N l'application définie de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n,\ N(x) = a_1|x_1| + a_2|x_2| + \dots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_i pour que N soit une norme sur $\mathbb{C}^n$.

2. Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'application N définie par :

$$\forall f \in E,\ N(f) = \sup_{t\in[0,1]} |tf(t)|,$$

est une norme sur E.

3. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que :

$$P \mapsto \|P\|_A = \sup_{t\in A} |P(t)|,$$

définisse une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

4. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. À quelle condition l'application

$$N : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \dots + x_n f_n(t)|,$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^n$?

5. Soit : $A \in \mathscr{O}(n)$ ($\mathscr{O}(n) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / {}^tAA = I_n\}$) Montrer que :

$$\|A\|_1 \leqslant n\sqrt{n},$$

où $\|A\|_1 = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{ij}|$.

Exercice 2

1. Trouver des constantes $\alpha, \alpha', \alpha''$ strictement positives telles que : $\forall f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$,
- $N_1(f) \leqslant \alpha N_\infty(f)$,
- $N_2(f) \leqslant \alpha' N_\infty(f)$,
- $N_1(f) \leqslant \alpha'' N_2(f)$.

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ par : $\forall n \in \mathbb{N}*$,

$$f_n(t) = \begin{cases} n - n^2 t & \text{si} \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 & \text{si } t \in \left[\dfrac{1}{n}, 0\right]. \end{cases}$$

2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, puis calculer $N_1(f)$, $N_2(f)$ et $N_\infty(f)$.

3. Montrer avec la question 1 qu'il n'est pas possible de trouver β, β', β'' strictement positives telles que :

$$\beta N_\infty(f) \leqslant N_1(f),\ \beta' N_\infty(f) \leqslant N_2(f) \text{ ou } \beta'' N_2(f) \leqslant N_1(f)$$

pour tout $f \in \mathscr{C}^0[0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 3

Soit $(P)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à m et convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, $\forall t \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t) = f(t)$).

1. Justifier l'existence d'un polynôme : $P \in \mathbb{R}_m[X]$, tel que : $\forall 0 \leqslant k \leqslant m$, $P(k) = f(k)$.
On pourra utiliser les polynômes : $\forall 0 \leqslant k \leqslant m$, $L_k = \prod\limits_{i=1,\, i\neq k} \dfrac{X-k}{i-k}$.

2. Montrer que l'application N définie sur : $E = \mathbb{R}_m[X]$, par :

$$\forall Q \in E, \quad N(Q) = \max_{0\leqslant k\leqslant n} |Q(k)|,$$

définit une norme sur E.

3. Montrer que la suite $(P)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P pour cette norme N.

4. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On note : $\forall Q \in E$,

$$N_{\infty,[a,b]}(Q) = \sup_{t\in[a,b]} |Q(t)|.$$

Justifier que $N_{\infty,[a,b]}$ est encore une norme sur E.

5. En déduire que $f = P$, et donc qu'une telle suite ne peut converger que vers un polynôme.

Fin de l'épreuve