Devoir libre $n^\circ 4$

à rendre le 13/11/2020

Exercice 1

Continuité de la fonction longueur

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on note

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\mathrm{d}t$$

une expression intégrale de la longueur de la courbe représentative de f. On rappelle que l'application

$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

définit une norme sur l'espace $E = \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On note $E_1 = \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour toute fonction $f \in E_1$, on note

$$\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$

1. Comparaison des normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$
   a) Montrer que l'application $f \mapsto \|f\|$ définit une norme sur E_1.
   b) Montrer que
   $$\forall f \in E_1,\ \|f\|_\infty \leqslant \|f\|$$
   c) Les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E_1 ?
2. On désigne par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, 1],\ f_n(t) = \frac{\sin(n\pi t)}{\sqrt{n}}$$
   a) Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ (c'est-à-dire elle converge vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$).
   b) On désigne, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, par $I_n = L(f_n)$ la longueur de la courbe représentative de f_n. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$
   c) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|_\infty)$?
   d) L'application $L : f \mapsto L(f)$ est-elle continue sur $(E_1, \|.\|)$?

Exercice 2

Exemple d'une isométrie

L'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme définie par :

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On considère l'application T définie sur E par :

$$\forall t \in [0,1], \quad T(f)(t) = f(t^2).$$

1. Montrer que l'application T est à valeurs dans E.

2. Vérifier que T est un endomorphisme de E.

3. Montrer que l'opérateur T est continu sur $(E, \|.\|_\infty)$. Que peut-on dire de T ?

4. Calculer $|||T|||$.

Fin de l'épreuve