Devoir libre $n^\circ 5$

à rendre le 07/12/2020

Exercice 1

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $k \in \mathbb{C}$.

1. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et en déduire une valeur propre de A.

2. Montrer que le polynôme caractéristique de A peut se mettre sous la forme :

$$\chi_A(x) = x^2(x-a)(x-b)A.$$

3. Montrer que a et b vérifie : $a+b=k$, $a^2+b^2=k^2+6$.

4. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles on a $a=b$? Préciser alors les vecteurs propres associés à cette valeur propre.

5. Quelles sont les valeurs de k pour lesquelles la matrice est diagonalisable ?

Exercice 2

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ constitué des fonctions f admettant une limite finie en $+\infty$.
On note u l'application de E défini par :

$$\forall f \in E, \forall x \geqslant 0, \quad u(f)(x) = f(x+1).$$

1. Vérifier que $u \in \mathscr{L}(E)$.

2. Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé.
Montrer que si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, alors $\lambda = 1$.

3. Montrer que 1 est valeur propre de u et déterminer l'espace propre associé.

4. On suppose à nouveau que λ est valeur propre de u et f est un vecteur propre associé. Montrer que si f tend vers 0 en $+\infty$, alors $|\lambda| < 1$.

5. Réciproquement, montrer que pour $|\lambda| < 1$, il est possible de définir une fonction f sur $\mathbb{R}^+$ à l'aide de conditions sur $[0, 1]$ qui soit vecteur propre de u associé à λ.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème : « dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E et son polynôme minimal ont les mêmes racines. »

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe au moins un polynôme normalisé annulateur pour u.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme normalisé annulateur pour u et de plus bas degré qu'on appellera polynôme minimal de u et qu'on notera π_u.

3. Montrer que si λ est valeur propre de u alors λ est racine de π_u.

4. Montrer que toute racine de π_u est valeur propre de u.

5. Conclure.

Fin de l'épreuve