MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 20/21

Devoir libre $n^\circ 6$

à rendre le 28/12/2020

Dans tout ce problème n et N sont deux entiers naturels non nuls.
• E est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^N$.
• $\mathscr{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel E.
On note o l'endomorphisme nul et id_E l'endomorphisme identité.
• $\mathbb{C}[X]$ est l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}_n[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
• Étant donné $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On désigne par $Sp(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f, par $\mathscr{R}(f)$ l'ensemble $\{g \in \mathscr{L}(E) | g^2 = f\}$ et par $P(f)$ l'endomorphisme de E :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$$

(avec la convention $f^0 = id_E$).
• F et G étant deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, on appelle projecteur sur F parallèlement à G, l'endomorphisme $P_{F,G}$ de E tel que :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad P_{F,G}(x + y) = x.$$

• On notera $\mathbb{N}_n$, l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

–I–

Soit f un endomorphisme de E.
On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$a \neq b \ \text{ et } \ \begin{cases} id_E &= p + q \\ f &= ap + bq \\ f^2 &= a^2 p + b^2 q \end{cases}$$

1. Calculer $(f - a id_E) \circ (f - b id_E)$.
Enduire que f est diagonalisable.

2. **2*a*.** Établir que $p \circ q = q \circ p = o$, $p^2 = p$ et $q^2 = q$.

2*b*. Montrer que $Sp(f) = \{a, b\}$.

2*c*. On suppose que $ab \neq 0$.
Démontrer que f est bijective et que $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f^m = a^m p + b^m b$.

3. Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - a id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - b id_E)$ et que q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(f - b id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f - a id_E)$

4. On pose $F = \{xp + yq | (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$.

4*a*. Démontrer que F est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ et en donner la dimension.

4*b*. Déterminer les projecteurs qui sont éléments de F.

4*c*. déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$.

5. Exemple : On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5*a*. Calculer J^m pour $m \in \mathbb{N}$.
En déduire A^m en fonction de I et J.

5*b*. Démontrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $(B, C) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad A^m = a^m B + b^m C.$$

5*c*. Démonter en fonction de B et C quatre matrices M telles que $M^2 = A$.

–II–

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_n$ n endomorphismes non nuls de E, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres complexes distinctes, et f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad f^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m p_k.$$

1. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(x_k) p_k$.

2. On pose $\Pi = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, $\Pi_l = \displaystyle\prod_{k=1, k\neq l}^{n}(X - x_k)$ et $L_l = \dfrac{1}{\Pi_l(x_l)}\Pi_l$.

2*a*. Calculer $\Pi(f)$. Qu'en déduit-on pour f ?

2*b*. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $p_k = L_k(f)$.
Vérifier que $\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2$, $p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq l \\ p_k & \text{si} \quad k = l \end{cases}$.

2*c*. Démontrer que $SP(f) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

3. Démontrer que pour $k \in \mathbb{N}_n$, p_k est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - x_k id_E)$ parallèlement à $V_k = \displaystyle\bigoplus_{l=1, \neq k}^{n} \operatorname{Ker}(f - x_l id_E)$.

4. On désigne par F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ engendré par $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

4*a*. Quelle est la dimension de F ?

4*b*. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathscr{R}(f) \cap F$.

4*c*. Quels sont les projecteurs qui sont éléments de F ? (On précisera le nombre de ces projecteurs et les éléments caractéristiques de chaque projecteur)

5. On suppose $n = N$.

5*a*. Démontrer que $\forall g \in \mathscr{L}(E)$, $[g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow g \in F]$.

5*b*. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathscr{R}(f)$.

6. Soit h un endomorphisme diagonalisable de E tel que

$$Sp(h) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Démontrer qu'il existe n endomorphismes non nuls de E $q_1, q_2, ..., q_n$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad h^m = \sum_{k=1}^{n} x_k^m q_k.$$

7. Exemple : On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7*a*. Déterminer les valeurs propres x_1, x_2 et x_3 de A.

7*b*. Calculer L_1, L_2, L_3 et les coefficients des matrices : $A_1 = L_1(A), A_2 = L_2(A)$ et $A_3 = L_3(A)$.

7*c*. Déterminer en fonction de A_1, A_2 et A_3 toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

–III–

Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. **1*a*.** Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.

1*b*. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Établir que $P(u) = 0 \Leftrightarrow X^n$ divise P

1*c*. Démontrer que $\left(\mathscr{R}(u) \neq \emptyset \Rightarrow n \leqslant \dfrac{N+1}{2}\right)$.

2. **2*a*.** Déterminer une suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in]-1,1[, \sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

2*b*. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Démontrer que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

On prend dans la suite du problème $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et on pose $Q_{n,w} = wP_n\left(\dfrac{X}{w^2}\right)$.

3. **3*a*.** Démontrer que l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - w^2$ est $\{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$.

3*b*. Établir que $\mathscr{R}(u + w^2 id_E) \neq \emptyset$.

4. On suppose $n = N$ et on prend $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), u^2(x), ..., u^{n-1}(x))$ soit libre.
On suppose que $g \in \mathscr{R}(u + w^2 id_E)$.

4*a*. Démontrer que g commute avec u.

4*b*. Prouver qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-}[X]$ tel que $g(x) = (P(u))(x)$.
Établir que $g = P(u)$.

4*c*. Démontrer que $\mathscr{R}(u + w^2 id_E) = \{Q_{n,x}(u), -Q_{n,w}(u)\}$.

5. Application : Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices M telles que $M^2 = A$.

6. On suppose que $n \geqslant 2$ et que $\mathscr{R}(u) \neq \emptyset$. Démontrer que $\mathscr{R}(u)$ possède une infinité d'éléments.

7. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7*a*. Déterminer les matrices qui commutent avec A.

7*b*. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

–IV–

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\alpha_k}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les valeurs propres distinctes de f et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ leurs ordre de multiplicité respectifs. On pose $E_k = \operatorname{Ker}\left[(f - x_k id_E)^{\alpha_k}\right]$ et on rappelle que $\displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n} E_k = E$.

1. 1*a*. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Φ_f de coefficient de plus haut degré égal à 1 tel que :

$$\{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q | Q \in \mathbb{C}[X]\}.$$

1*b*. Démontrer que Φ_f s'écrit :

$$\Phi_f(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)^{\beta_k},$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ 1 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

2. Soit g un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ g(E_k) \subset E_k$.

3. Établir :

3*a*. $\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \dfrac{\alpha_1 + 1}{2}\right] \Rightarrow \mathscr{R}(f) = \emptyset$.

3*b*. $0 \notin Sp(f) \Rightarrow \mathscr{R}(f) \neq \emptyset$.

3*c*. Démontrer que dans le case où $x_1 = 0$ et $\alpha_1 \geqslant 2$: ($\mathscr{R}(f) = \emptyset$) ou ($\mathscr{R}(f)$ possède une infinité d'éléments).

4. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}_n,\ \alpha_k = \beta_k$.

4*a*. Démontrer que si $0 \notin Sp(f)$ alors $\operatorname{card}(\mathscr{R}(f)) = 2^n$.

4*b*. On suppose $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.
Démontrer que $\operatorname{card}(\mathscr{R}(f)) = 2^{n-1}$.

FIN DE L'ÉPREUVE