DEVOIR LIBRE n°7

à rendre le 12/01/2021

À toute suite de nombres complexes $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on associe les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par les relations

$$b_n = a_{n-1} - a_n, \quad c_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \quad d_n = a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n.$$

- On dit que (a_n) est à variations bornées si la série $\sum b_n$ est absolument convergente.
- On dit que (a_n) est quasi-convexe si la série $\sum nd_n$ est absolument convergente.
- On dit que (a_n) est convexe si elle est à valeurs réelles et si le réel d_n est positif ou nul pour tout $n \geq 1$.

PRÉLIMINAIRES

1. Montrer que, si (a_n) est à variations bornées alors (a_n) est convergente.
2. Prouver l'égalité, valable pour tout entier N :

$$\sum_{n=1}^N nd_n = \sum_{n=1}^N b_n - Nb_{N+1}.$$

PARTIE I

Dans cette partie, (a_n) est une suite réelle.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite (b_n) , pour que la suite (a_n) soit convexe.
2. On suppose dans cette question, qu'il existe une fonction réelle f , de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, à dérivée seconde positive ou nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $a_n = f(n)$ pour tout n .
Démontrer que (a_n) est convexe.
3. Déterminer toutes les suites convexes (a_n) telles que la suite a' définie par les relations $a'_n = -a_n$ soient également convexes.
4. Déterminer les valeurs du réel strictement positif α telles que la suite de terme général $a_n = n^\alpha$ soit convexe.
5. Pour tout réel x , on note $E(x)$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique entier relatif tel que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1.$$

On adopte, dans cette question, $a_n = E(n^\alpha)$ où α est un réel strictement positif.

5a. La suite (a_n) est-elle convexe pour $\alpha = \frac{3}{2}$?

(On pourra examiner le cas $n = 9$ en s'aidant d'une calculatrice, toutefois, le raisonnement figurant sur la copie devra exclure toute valeur approchée et ne s'appuyer que sur des inégalités entre entiers.)

5b. Démontrer que la suite (a_n) est convexe pour $\alpha \geq 2$.

PARTIE II

Dans cette partie, (a_n) est une suite réelle, convexe et bornée.

On notera A un majorant des réels $|a_n|$.

1. Démontrer que la suite (b_n) est convergente. Déterminer sa limite.
2. Démontrer que la suite (a_n) est convergente.
3. Soient n et p deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $n \geq 2p$, démontrer les relations

$$0 \leq nb_n \leq 2(a_p - a_n).$$

En déduire les limites des suites $(nb_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(nb_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

PARTIE III

Dans cette partie, (a_n) est une suite quasi-convexe et bornée.

On notera A un majorant des réels $|a_n|$.

1. Démontrer, pour tout entier $N \geq 2$, la relation

$$\sum_{n=1}^N |b_n| \leq |a_0 - a_N| + 2 \sum_{n=1}^{N-1} n|d_n|.$$

En déduire que (a_n) est à variations bornées.

(On remarquera qu'on a la relation suivante (qui se démontre en développant simplement le second membre), valable pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$b_n = \frac{1}{N}(b_1 + \dots + b_N) - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{N}(b_p - b_{p+1}) + \sum_{p=n}^{N-1} \frac{N-p}{N}(b_p - b_{p+1}),$$

et on montrera que l'on peut en déduire la formule suivante :

$$\sum_{n=1}^N |b_n| \leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + 2 \sum_{n=1}^{N-1} |b_n - b_{n+1}|.$$

2. Démontrer (en justifiant l'existence des sommes des séries concernées) les relations suivantes

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} b_n \right| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n|d_n|.$$

3. Démontrer l'existence et l'égalité des deux membres de la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

FIN DE L'ÉPREUVE