Devoir libre $n^\circ 08$

à rendre le 25/01/2021

–I–

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

converge.
Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$$

converge.

1. Montrer que tout élément f de F appartient à E (on montrera que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ de tout élément f de F est absolument convergente).
En déduire que F a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
Pour quelles valeurs de α, f est-elle élément de E, de F ?

3. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.
Pour quelles valeurs de α, f est-elle élément de E, de F ?

4. Soit $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (\ln(t))^n$ avec n entier naturel (ln désigne le logarithme népérien).
f est-elle élément de E, de F ?

–II–

Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

converge.

1. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{1}{t}$. f est-elle élément de G ? Si oui, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$

2*a*. Montrer que f est un élément de G.

2*b*. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ (on pourra faire le changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$).

3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{(\ln(t))^n}{(1-t)^\alpha}$ avec α réel et n entier naturel.

3*a*. Déterminer, à quelle condition sur α et n, f est un élément de G.

3*b*. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

4. Soit $f_\alpha :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln(t)}$ avec α réel.

4*a*. Déterminer l'ensemble U des valeurs de α pour lesquelles f_α est élément de G.

4*b*. α étant élément de U, on pose $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x f_\alpha(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $I_\alpha(x) = \displaystyle\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\ln(u)}$.

4*c*. En déduire la valeur de $I_\alpha = \displaystyle\int_0^1 f_\alpha(t)\mathrm{d}t$.

FIN DÉ L'ÉPREUVE