MP – CPGE MOHAMED VI-KÉNITRA

Année scolaire 20/21

DEVOIR LIBRE $n^\circ 10$

à rendre le 01/03/2021

Exercice : Question préliminaire : Soit $h : (x,t) \mapsto h(x,t)$ une fonction de deux variables continue et admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue. u et v sont deux fonctions dérivables. On suppose que l'application $H : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} h(x,t)\mathrm{d}t$ existe et bien définie. Montrer que H est dérivable sur son domaine de définition et que

$$H'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + v'(x)h(x,v(x)) - u'(x)h(x,u(x)).$$

Indication : considérer la fonction $F(x,y) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} h(y,t)\mathrm{d}t.$

Soit f une fonction continue (mais non nécessairement dérivable) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose pour n entier supérieur ou égal à 1

$$f_n(x) = \frac{3n}{4}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)\left(1-n^2t^2\right)\mathrm{d}t.$$

et l'on note que $\displaystyle\frac{3n}{4}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(1-n^2t^2\right)\mathrm{d}t = 1.$

1. **1*a*.** Montrer que si f est nulle en dehors d'un intervalle bornée, alors il existe un intervalle borné tel que chaque f_n ($n = 1, 2, \ldots$) s'annule en dehors de cet intervalle.

   1*b*. Montrer que si f est bornée, il existe un nombre réel strictement positif M tel que

   $$\sup_{n\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leqslant M.$$

2. Montrer que chaque f_n est dérivable et calculer $f_n'(x)$ (*utiliser la question préliminaire*).
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact.
4. Montrer que si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$), alors f_n et f_n' ont une limite que l'on précisera, quand x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$ où la dérivée $f'(x)$ existe, la suite $\left(f_n'(x)\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite $f'(x)$.

Problème : Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et tout x de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la différentielle de f en x. On rappelle que $\mathrm{d}f_x$ est la forme linéaire définie par :

$$\forall h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathrm{d}f_x(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i.$$

On note, pour tout entier naturel non nul n, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. Pour $j \in \{1, 2, \infty\}$, on note $f_j : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|_j$ et $\mathscr{P}_j$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ où f_j est différentiable.

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que l'application $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0.

2. Déterminer $\mathscr{P}_j$ pour $n = 1$ et $j \in \{1, 2, \infty\}$.
On suppose, pour la suite de cette partie que $n \geqslant 2$.

3. On s'intéresse à la différentiabilité de $f_\infty : x \mapsto \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Précisément, on se propose de montrer que $\mathscr{P}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists! k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ \|x\|_\infty = |x_k|\}$.

3*a*. Dessiner $\mathscr{P}_\infty$ pour $n = 2$.

3*b*. Montrer que $\mathscr{P}_\infty$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. On pourra utiliser la partition $\mathscr{P}_\infty = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathscr{C}_k$, où $\mathscr{C}_k = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{k\}, \ |x_j| < |x_k|\}$.

3*c*. Soient k un entier compris entre 1 et n et $x \in \mathscr{C}_k$. Montrer que f_∞ est différentiable en x de différentielle $\mathrm{d}(f_\infty)_x : h \mapsto \dfrac{x_k}{|x_k|} h_k$.

3*d*. Montrer que f_∞ n'est pas différentiable en $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \mathscr{P}_\infty$ et conclure.

4. On s'intéresse à la différentielle de $f_1 : x \mapsto \|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Précisément, on se propose de montrer que $\mathscr{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ x_k \neq 0\}$ (l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont toutes non nulles).

4*a*. Dessiner $\mathscr{P}_1$ pour $n = 2$.

4*b*. Montrer que $\mathscr{P}_1$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

4*c*. Montrer que f_1 est différentiable en tout point x de $\mathscr{P}_1$ de différentielle $\mathrm{d}(f_1)_x : h \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{|x_k|} h_k$.

4*d*. Montrer que f_1 n'est pas différentiable en $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}^n \backslash \mathscr{P}_1$ et conclure.

5. Déterminer l'ensemble $\mathscr{P}_2$ des points de $\mathbb{R}^n$ où $f_2 : x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est différentielle.

Fin de l'épreuve