# MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra

Année scolaire 21/22

# Devoir libre $n^\circ 2$

à rendre le 15/10/2021

Dans ce problème, tous les espaces vectoriels sont supposés de dimensions finies sur le corps commutatif $\mathbb{K}$.
Le but du problème est de généraliser la notion d'inverse d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v \in \mathscr{L}(F, E)$. On considère les relations suivantes :

$$(1)\ u.v.u = u$$

$$(2)\ v.u.v = v$$

$$(3)\ \dim(E) = \dim(F) \text{ et } u.v = v.u$$

Si la relation (1) est vérifiée, on dit que $v$ est une inverse généralisée ou $g$-inverse de $u$.
Si les relations (1) et (2) sont vérifiées, $v$ est dite inverse faible, ou $f$-inverse de $u$.
Si les trois relations sont vérifiées, $v$ est dite pseudo-inverse ou $p$-inverse de $u$.

## A. Étude des $g$-inverses.

**1.** Dans cette question, on suppose que $u$ admet une $g$-inverse $v$, et l'on note $p = v.u$ et $q = u.v$.

**1*a*.** Calculer $p^2, q^2$. Montrer que $\operatorname{Im}(q) = \operatorname{Im}(u)$, $\operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Ker}(u)$.

**1*b*.** Montrer que $\operatorname{rg}(p) = \operatorname{rg}(q) = \operatorname{rg}(u) \leq \operatorname{rg}(v)$.

**1*c*.** Montrer qu'il existe un supplémentaire $E_1$ de $\operatorname{Ker}(u)$ dans $E$, tel que $v$ prolonge l'isomorphisme induit $(u|_{E_1})^{-1}$ de $E_1$ dans $\operatorname{Im}(u)$.

**2.** **2*a*.** Déduire de l'analyse précédente l'existence d'au moins une $g$-inverse $v$ de $u$.

**2*b*.** Montrer qu'en fait $\operatorname{rg}(v)$ peut prendre toute valeur comprise entre $\operatorname{rg}(u)$ et $\min(\dim(E), \dim(F))$.

**2*c*.** Montrer que les $g$-inverses de $u$ forment un sous-espace affine de $\mathscr{L}(F, E)$, quelle est sa dimension ?

**2*d*.** Quelles sont les $g$-inverses de $u$ si $u$ est nulle, injective, surjective, bijective ?

**3.** En choisissant des bases convenables de $E$ et $F$, et en cherchant $v$ par sa matrice dans ces bases, retrouver tous les résultats de la question 2).

**B. Étude des $f$-inverses.**

**1.** On suppose dans cette question que $u$ admet une $f$-inverse $v$.
Montrer que $E = \mathrm{Im}(v) \oplus \mathrm{Ker}(u)$, $F = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$.

**2.** **2*a*.** Montrer que si $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus E_1$ et $F = \mathrm{Im}(u) \oplus F_1$, il existe une unique $f$-inverse $v$ de $u$ telle que $\mathrm{Ker}(v) = F_1$ et $\mathrm{Im}(v) = E_1$.

**2*b*.** En déduire l'existence d'une $f$-inverse de $u$.

**2*c*.** Quelles sont les $f$-inverses de $u$ si $u$ est nulle, injective, surjective, bijective ?

**3.** Retrouver 2b) et 2c) au moyen de matrices appropriées, et montrer l'équivalence :

$$v \text{ est une } f\text{-inverse de } u \Leftrightarrow v \text{ est une } g\text{-inverse de } u \text{ et } \mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v).$$

**4.** Exemples de $f$-inverses : Trouver les $f$-inverses de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Même question pour les matrices de rang 1 ( on remarquera que toute matrice de rang s'écrit sous la forme $X^tY$ où $X$ et $Y$ sont des vecteurs colonnes ). Étudier le cas particulier $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**C. Applications.**

**1.** Résolution d'une équation linéaire
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $v$ une $g$-inverse de $u$. On considère l'équation linéaire $u(x) = b$, où $b \in F$.
Montrer que cette équation a une solution si et seulement si $b = (u.v)(b)$, et qu'alors ses solutions sont données par :

$$x = v(b) + (Id_E - v.u)(z),$$

où $z$ décrit $E$.

**2.** Factorisation à droite
Soient $a \in \mathscr{L}(E, F)$, $c \in \mathscr{L}(G, F)$, $a'$ une $g$-inverse de $a$. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) Il existe $x \in \mathscr{L}(G, E)$ tel que $a.x = c$,
ii) $a.a'.c = c$,
iii) $\mathrm{Im}(c) \subset \mathrm{Im}(a)$.
Montrer que si ces conditions sont satisfaites, les solutions $x$ forment un sous-espace affine de $\mathscr{L}(G, E)$ dont on déterminera la dimension.

**3.** Factorisation à gauche
Soient $c \in \mathscr{L}(G, F)$, $b \in \mathscr{L}(G, H)$, $b'$ une $g$-inverse de $b$. Montrer l'équivalence des propriétés :
i) Il existe $x \in \mathscr{L}(H, F)$ tel que $x.b = c$,
ii) $c.b'.b = c$,
iii) $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathrm{Ker}(c)$.
Montrer que si ces conditions sont satisfaites, les solutions $x$ forment un sous-espace affine de $\mathscr{L}(H, F)$ dont on déterminera la dimension.

Fin de l'épreuve