Devoir libre $n°4$

à rendre le 08/11/2021

Étude de suites récurrentes linéaires d'ordre p

Étant donnés $p+1$ ($p \in \mathbb{N}$) nombres complexes fixés $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}$, on considère l'ensemble E des suites complexes $(x_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; x_{n+p} = \alpha_{p-1}x_{n+p-1} + ... + \alpha_1 x_{n+1} + +\alpha_0 x_n \;\; (1)$$

Soit E l'ensemble des suites vérifiant la relation (1). Le but du problème est de trouver toutes les suites vérifiant la relation de récurrence (1).

Partie I

1. En considérant l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^p \\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (x_0, x_1, ..., x_{p-1}) \end{array}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension p.

2. ***2a.*** Soit f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (x'_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

avec $x'_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est un endomorphisme de E.
Vérifier que f est injectif si, et seulement si, $\alpha_0 \neq 0$.

2b. On désigne par $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$ et $\mathscr{B} = \varphi^{-1}(\mathscr{B}_c)$. Vérifier que $\mathscr{B}$ est une base de E et donner de l'endomorphisme f dans cette base.

Partie II

1. ***1a.*** Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+p-1} \end{pmatrix}$$

Montrer alors que la relation de récurrence (1) peut alors s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \;\; X_{n+1} = AX_n,$$

où A est la matrice constante de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ X_n = A^n X_0$.

1*b*. Calculer χ_A, polynôme caractéristique de A.

2. **2*a*.** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite géométriques $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ est dans E si, et seulement si, λ vérifie l'équation :

$$\lambda^p - \alpha_{p-1}\lambda^{p-1} - \dots - \alpha_1\lambda - \alpha_0 = 0 \ \ (2)$$

2*b*. On suppose que l'équation (2) admet p racines distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$. Montrer que les suites $(\lambda_0^n)_{n\geq 0}, (\lambda_1^n)_{n\geq 0}, \dots, (\lambda_{p-1}^n)_{n\geq 0}$ forment une base de E.
En déduire les suites $(x_n)_{n\geq 0}$ réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+3} = 6x_n - 11x_{n+1} + 6x_{n+2} \ \ (3)$$

2*c*. On suppose que λ est une solution double de (2). Montrer que la suite $(n\lambda^n)_{n\geq 0}$ est aussi dans E.
En déduire les suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ x_{n+3} = 5x_n - 8x_{n+1} + 4x_{n+2} \ \ (4)$$

2*d*. On suppose que λ est solution d'ordre p de (2). Vérifier que les suites

$$(\lambda^n)_{n\geq 0}, (n\lambda^n)_{n\geq 0}, \dots, (n^{p-1}\lambda^n)_{n\geq 0}$$

forment une base de E.
En déduire la solution générale de (1).

3. Si $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = p$, donner la forme générale de toutes les suites vérifiant la relation (1).

Fin de l'épreuve