

DEVOIR LIBRE n°5

à rendre le 22/11/2021

Exercice I

Soient A et M deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles $AM = MA$. On suppose que $\text{card}(\text{sp}(M)) = n$.

1. Montrer que tout vecteur propre de M est un vecteur propre de A .
2. Montrer qu'il existe des scalaires complexes $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ vérifiant :

$$A = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \dots + \alpha_{n-1} M^{n-1}$$

3. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation matricielle $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice II

1 Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels vérifiant $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 0$.
2. En déduire que A est diagonalisable (considérer la fonction $\varphi : x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x + k}$).

Exercice III

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_{n-k} X^k$ un polynôme de degré n de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.

Pour $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$.

1. Montrer que $\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{k=0}^n \frac{S_k}{X^{k+1}} + \frac{1}{X^{n+1}} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{n+1}}{X - \lambda_i}.$

2. En déduire que, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$P'(x) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-l} a_{n-l-i} S_i \right) x^{l-1} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. Montrer enfin que $a_0 = 1$ et que $a_k = -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_{k-i} S_i$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}.$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit les deux suites $(B_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ par les relations :

- $(B_1, a_1) = (A, -\text{Tr}(B_1)),$

- $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (B_k, a_k) = \left(A(B_{k-1} + a_{k-1}I_n), -\frac{1}{k} \text{Tr}(B_k) \right).$

Vérifier que $\chi_A(x) = X^n + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} X^k$ où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A .

Exercice IV

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales. Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts. Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(I, A, A^2, \dots, A^{n-1}).$

Problème

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients complexes.
- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{sp}(M)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de M , un vecteur colonne X sera dit vecteur propre de M , associé à la valeur propre λ , s'il est non nul et si $MX = \lambda X$. Si $\lambda \in \text{sp}(M)$, on désigne par E_λ l'ensemble des vecteurs colonnes X tels que $MX = \lambda X$.
- Si N est une matrice et si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ on note $N.V = \{ NM \mid M \in V \}.$

Partie I

1. Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{sp}(A) \neq \emptyset.$
2. Soient A et B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA.$
 - 2a. Montrer que si $\lambda \in \text{sp}(A), B.E_\lambda \subset E_\lambda.$
Montrer que si $\mu \in \text{sp}(B), A.E_\mu \subset E_\mu.$
 - 2b. Montrer qu'il existe un vecteur propre commun aux matrices A et $B.$
 - 2c. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que, si $PAP^{-1} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $PBP^{-1} = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}, \alpha_{i1} = \beta_{i1} = 0.$
 - 2d. Si $A' = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B' = (\beta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$
Comparer $A'B'$ et $B'A'.$
3. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et commutent entre elles, il existe une matrice S inversible telle que $S^{-1}AS$ et $S^{-1}BS$ soient triangulaires supérieures.

Partie : II

A et B étant deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fixées, on s'intéresse à

$$E = \{ Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AZ - ZB = 0 \}.$$

1. Montrer que les applications : $\mathcal{A} : Z \mapsto AZ$ et $\mathcal{B} : Z \mapsto ZB$ sont des endomorphismes du $\mathbb{C}$ - espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Comparer $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$.
3. On désigne par $\text{sp}(\mathcal{A})$ (respectivement $\text{sp}(\mathcal{B})$) l'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{B}$).
Montrer que $\text{sp}(\mathcal{A}) = \text{sp}(A)$ et $\text{sp}(\mathcal{B}) = \text{sp}(B)$.
4. On considère $\mathcal{F} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$.
4a. Soient $(\lambda, \mu) \in \text{sp}(A) \times \text{sp}(B)$. Soit X un vecteur propre de A associé à λ et Y un vecteur propre de B associé à μ .
Montrer que $Z = X^t Y$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $\mathcal{F}$, déterminer la valeur propre associée.
4b. Montrer que si $\alpha \in \text{sp}(\mathcal{F})$, il existe $(\lambda, \mu) \in \text{sp}(A) \times \text{sp}(B)$ tels que $\alpha = \lambda - \mu$.
4c. Montrer que $\text{sp}(B) = \text{sp}(B^t)$.
4d. En déduire $\text{sp}(\mathcal{F})$.
5. Montrer que $\mathcal{F}$ est inversible si et seulement si $\text{sp}(A) \cap \text{sp}(B) = \emptyset$.
6. *Exemple :* Considérons les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\{ Z \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \mid AZ - ZB = 0 \}$ (on remarquera que A a une valeur propre double).

FIN DE L'ÉPREUVE