MP – CPGE Mohamed VI-Kénitra
Année scolaire 21/22

Devoir libre $n^\circ 6$

à rendre le 10/12/2021

Dans tout le problème E désigne un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. Un partie A de E est dit connexe s'il ne s'écrit pas comme réunion disjointe de deux ouverts de A (ouverts relatifs) non vides. A désigne une partie de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. **1*a*.** A est connexe,

1*b*. Les seules parties qui sont à la fois ouverts et fermés relatifs de A sont $\varnothing$ et A,

1*c*. Si $A \subset O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 deux ouverts disjoints, alors $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$.

2. Monter qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe si, et seulement si, A est intervalle.

3. Soit F un espace vectoriel normé et $f : A \subset E \to F$ une application continue. Montrer que si A est connexe, alors $f(A)$ est connexe.

4. Soit A une partie connexe et B une partie de E tel que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe. En particulier $\overline{A}$ est connexe.

5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes telle que $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe.

6. Soit A une partie connexe par arcs. On se propose de montrer que A est connexe. Soit $a \in A$, pour tout $x \in A$, soit γ_x le chemin continu, contenu dans A liant a à x.

6*a*. Montrer que $\gamma_x\left([0,1]\right)$ est connexe pour tout $x \in A$.

6*b*. montrer que $A = \displaystyle\bigcup_{x\in A} \gamma_x\left([0,1]\right)$.

6*c*. En déduire que A est connexe.

7. On note $A = \left\{ \left(x, \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) \;\middle|\; x > 0 \right\}$.

7*a*. Démontrer que A est connexe.

7*b*. Démontrer que $\bar{A} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup A$.

7*c*. Démontrer que $\bar{A}$ est connexe.

7*d*. On souhaite démontrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \bar{A}$ avec $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. On note $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ de sorte que, si $u(t) \neq 0$, alors $v(t) = \sin\left(\dfrac{1}{u(t)}\right)$. Enfin, on note $t_0 = \sup\{\, t > 0 \mid u(t) = 0 \,\}$.

i) Démontrer que $u(t_0) = 0$.

ii) On pose $a = v(t_0)$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, alors $|v(t) - a| < \dfrac{1}{2}$.

iii) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$. Justifier qu'il existe $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ avec $u(t_1) = \dfrac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ et $u(t_2) = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

iv) Conclure.

Fin de l'épreuve