MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 21/22

Devoir libre $n^\circ 9$

à rendre le 24/1/2022

Dans toute la composition, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. On note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\mathscr{L}$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ formé des fonctions lipschitziennes, c'est à dire des fonctions φ telles qu'il existe une constante $K_\varphi \geq 0$ telle que :

$$\forall (x,y)\mathbb{R}^2,\ \ |\varphi(x)-\varphi(y)| \leq K_\varphi |x-y|.$$

Le but du problème est de chercher les fonctions $F \in \mathscr{L}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ F(x) - \lambda F(x+a) = f(x)\ \ (*)$$

où $f \in \mathscr{L}$ est une fonction donnée et λ et a sont deux réels non nuls.

Partie I

1. Soit $F \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka)$$

et

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).$$

2. Montrer que $\mathscr{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dérivable. Montrer que $f \in \mathscr{L}$ si, et seulement si, sa dérivée f' est bornée.

4. Soient f et g deux fonctions bornées de $\mathscr{L}$. Montrer que le produit fg appartient à $\mathscr{L}$. À l'aide d'un contre-exemple, montrer que ce n'est plus le cas si f et g ne sont pas toutes les deux bornées.

5. Soit $f \in \mathscr{L}$. Montrer qu'il existe deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq A|x| + B.$$

6. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leq x - y \leq 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Démontrer que $f \in \mathscr{L}$.

Partie II

1. On suppose dans cette question que $|\lambda| < 1$.

1*a*. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n f(x + na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant $(*)$ et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(x + na).$$

1*b*. Déterminer F dans les cas suivants :

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x).$$

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \lambda^{-n} f(x-na)$ est absolument convergente. En déduire qu'il existe une et une seule fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifient $(*)$ et que F est donnée par

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} f(x-na).$$

Partie III

1. On suppose que $\lambda = 1$.

1*a*. Montrer que, pour qu'il existe une fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant $(*)$, il faut que f soit bornée.

1*b*. Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathscr{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - F(x+a) = 0.$$

Cette fonction est-elle unique ?

2. On suppose que $\lambda = -1$.

2*a*. Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathscr{L}$ non nulle vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + F(x+a) = 0.$$

Cette fonction est-elle unique ?

2*b*. On suppose que $a = 1$ et que $f \in \mathscr{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et de dérivée f' croissante.

i) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f(x+n)$ converge.

ii) Montrer qu'il existe une unique fonction $F \in \mathscr{L}$ vérifiant $(*)$ et de limite nulle en $+\infty$.

Fin de l'épreuve