Devoir libre $n^\circ 10$

à rendre le 7/2/2022

Dans tout problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices coefficients réels, à n lignes et p colonnes, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficient réels. On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $(X|Y) \mapsto {}^tXY$. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices symétriques à coefficients réels.
Sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ on définit la relation $\preceq$ par :

$$A \preceq B,\ \ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\ \ {}^tXAX \leq {}^tXBX.$$

$\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{\ M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \mid 0 \preceq M\ \}$ désigne l'ensemble des matrices symétriques et *positives.*
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A, il défini, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par $f_A(X) = AX$.

Partie I

1. Montrer que la relation $\preceq$ ainsi définie sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

2. Soient A et B de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Vérifier que si $A \preceq B$ alors $CA{}^tC \preceq CB{}^tC$.

3. Montrer que $0 \preceq A$ si, et seulement si, A toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

4. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

4*a*. Étant donné une matrice symétrique $0 \preceq A$, établir l'existence et l'unicité d'une matrice symétrique $0 \preceq B$ tel que $A = B^k$. Une telle matrice B est appelée racine k-ième (si $k = 2$ on dit racine carré) positive de A.

4*b*. Montrer que les sous-espaces propres d'une telle racine k-ième positive sont les mêmes que les sous-espaces propres de A. En déduire l'unicité de la racine carrée positive. Celle.ci est dans la suite notée $B = A^{\frac{1}{k}}$.

4*c*. Vérifier que $A^{\frac{1}{k}}$ est inversible si et seulement si A l'est et établir que $\left(A^{\frac{1}{k}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\frac{1}{k}}$.

5. Soit A et B dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives. Montrer que

$$A \preceq B \Rightarrow B^{-1} \preceq A^{-1}.$$

Partie II

Étant donné $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on appelle spectre ordonné et on note $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres (avec leur ordre de multiplicité) ordonnées par ordre décroissant. Si $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dont les spectres ordonnés sont :

$$\mathrm{sp}(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \} \text{ et } \mathrm{sp}(B) = \{ \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \}$$

où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ et $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n$.
On dit que $\mathrm{sp}(A) \leq \mathrm{sp}(B)$ si, et seulement si, $\lambda_i \leq \mu_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit $u_1, u_2, ..., u_p$ des vecteurs propres orthogonaux de A associés à des valeurs propres $\lambda_{i_1} \geq \lambda_{i_2} \geq ... \geq \lambda_{i_p}$ et L l'espace vectoriel engendré par ces p vecteurs. Déterminer les valeurs minimales et maximales du rapport $\dfrac{(X|AX)}{(X|X)}$ lorsque X parcourt $L \setminus \{0\}$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A \preceq B$. On appelle L le sous-espace engendré par $n-p+1$ vecteurs propres orthogonaux associés aux $n-p+1$ plus petites valeurs propres de B et L' le sous-espace engendré par p vecteurs propres orthogonaux associés aux p plus grandes valeurs propres de A.

Calculer la valeur maximale de $\dfrac{(X|BX)}{(X|X)}$ lorsque X parcourt $L \setminus \{0\}$ et la valeur minimale de $\dfrac{(X|AX)}{(X|X)}$ lorsque X parcourt $L' \setminus \{0\}$.

En déduire que $\mathrm{sp}(A) \leq \mathrm{sp}(B)$.

3. Construire un contre-exemple montrant que l'implication réciproque ($\mathrm{sp}(A) \leq \mathrm{sp}(B) \Rightarrow A \preceq B$) est fausse dès que $n \geq 2$.

4. Montrer que $\mathrm{sp}(A) \leq \mathrm{sp}(B)$ si, et seulement si, il existe une matrice orthogonal C telle que $A \preceq CB{}^tC$.

Partie III

Dans cette partie $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est considéré comme un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une partie de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée si, et seulement si, elle est majorée et minorée pour $\preceq$.

2. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{S}_n$ croissante, c'est-à-dire pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $A_k \preceq A_{k+1}$. Montrer que toute suite croissante et majorée pour $\preceq$ converge.

3. Soit A dans $\mathscr{S}_n^+$ telle que $A \leq I_n$. On définit la suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$M_0 = 0, \text{ et pour } k \in \mathbb{N}, \ M_{k+1} = \frac{1}{2}\left(I_n - A + M_k^2\right).$$

Montrer que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice L de $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $L \preceq I_n$ et vérifiant : $(I_n - L)^2 = A$. (On pourra encore choisir une base convenable.)

Fin de l'épreuve