DEVOIR LIBRE $n^{\circ}2$

à rendre le 26/09/2022

Dans tout ce qui suit n est un élément de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Les éléments de $\mathcal{S}_n$ sont donc les permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ en est une base. À toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on associe la matrice $P_\sigma = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases} .$$

À toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on associe également l'endomorphisme f_σ de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est P_σ .

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de permutation si l'on peut trouver un élément σ de $\mathcal{S}_n$ (nécessairement unique) tel que $A = P_\sigma$.

$\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et I_n la matrice unité.

I-QUELQUES EXEMPLES

1. Ici $n = 3$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que A est une matrice de permutation et trouver la permutation correspondante.

2. Ici $n = 4$. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2a. Montrer que A est une matrice de permutation et trouver la permutation correspondante.

2b. Calculer A^2 . En déduire que $\mathbb{R}^4 = \text{Ker}(A - I_3) \oplus \text{Ker}(A + I_3)$.

3. Ici n vaut encore 4. On considère l'élément σ de $\mathcal{S}_4$ défini par : $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4$ et $\sigma(4) = 1$.

3a. Écrire la matrice P_σ .

3b. Calculer P_σ^2 et P_σ^4 .

3c. Montrer que P_σ est semblable à $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II-UN PEU DE GÉNÉRALITÉS

$\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, σ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. $P_\sigma = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Que dire de P_σ si σ est la permutation identité? (on justifiera sa réponse)
2. Trouver le cardinal de $\mathcal{P}_n$.
3. **3a.** Déterminer, pour tout élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $f_\sigma(e_j)$.
3b. $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer AP_σ et préciser de quelle manière cette matrice se déduit de A .
4. σ' est une seconde permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que $P_{\sigma'}P_\sigma = P_{\sigma' \circ \sigma}$ (on pourra utiliser **2.a**) ou le produit matriciel).
5. Dédire de ce qui précède que $(\mathcal{P}_n, \cdot)$ est un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma$.
6. **6a.** Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, P_σ^k est une matrice de permutation.
6b. En raisonnant par l'absurde et en repensant à la question **1.**, montrer qu'il existe deux éléments distincts q et q' de $\mathbb{N}$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$.
6c. En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que $P_\sigma^r = I_n$.
7. $\mathcal{L}$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7a. Soit $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et σ une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que : $BP_\sigma = P_\sigma B$ si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}$.
7b. α et β sont deux réels. On considère la matrice

$$M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

$M(\alpha, \beta) = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $m_{ij} = \alpha$ si $i = j$ et β sinon.

Montrer que $M(\alpha, \beta)$ est dans $\mathcal{L}$.

7c. Réciproquement, montrer que si B est dans $\mathcal{L}$, il existe deux réels α et β tels que $B = M(\alpha, \beta)$.

8. **8a.** Montrer que dans chaque colonne de P_σ , il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.
8b. Montrer que dans chaque ligne de P_σ , il y a un 1 et un seul les autres coefficients étant nuls.
8c. Montrer que si P_σ n'est pas l'identité, la trace de P_σ est un élément de $\llbracket 0, n - 2 \rrbracket$.
8d. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur σ pour que P_σ ait pour trace $n - 2$.
8e. Montrer que deux matrices de permutation de trace $n - 2$ sont semblables.

FIN DE L'ÉPREUVE