Devoir libre $n^\circ 3$

à rendre le 11/10/2022

Exercice I

E désigne l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Si $P \in E$, on pose $\|P\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

1. Montrer l'application $\|.\|_\infty$ est un norme sur E.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

Déterminer son coefficient dominant.

3. Déterminer les racines de T_n.

4. Montrer que $\{\ x \in [-1,1] \mid\ |T_n(x)| = \|T_n\|_\infty\ \} = \left\{ \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \,\middle|\, k \in [\![0,n]\!] \right\}$.

5. Soit P un polynôme unitaire de degré n. Montrer

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

6. Cas d'égalité. Montrer

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n.$$

Exercice II

On se propose de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $[-1,1]$.
On dit qu'un sous-groupe additif H de $(\mathbb{R},+)$ est discret si pour tout segment I de $\mathbb{R}$ l'intersection $I \cap H$ est finie.

1. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ discrets sont de la forme :

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\ p\alpha \mid p \in \mathbb{Z}\ \}$$

ou α est un réel.

2. Montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont denses ou discrets.

3. Soient a, b deux réels non nuls. Montrer que le groupe additif $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b = \left\{ pa + qb \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est discret [resp. dense] si, et seulement si, $\dfrac{a}{b}$ est rationnel [resp. irrationnel].

4. On note $\Gamma = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ le cercle unité dans le plan complexe.

   4*a*. Montrer que $\left\{ e^{in} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$ est dense dans Γ.

   4*b*. Montrer que l'ensemble $\{ \cos(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$ est dense dans $[-1, 1]$, ce qui signifie que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u = (\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $[-1, 1]$.

Exercice III

Soit α un réel fixé dans $]0, 1[$ et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n^\alpha)$ pour $n \geq 0$. On se donne un réel $x \in [-1, 1]$ et on note θ le réel de $[0, \pi]$ défini par $x = \cos(\theta)$. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\varphi(n)$ l'entier défini par :

$$\varphi(n)^\alpha \leq \theta + 2n\pi < (\varphi(n) + 1)^\alpha$$

c'est-a-dire que $\varphi(n) = E((\theta + 2n\pi)^{\frac{1}{\alpha}})$.

1. Montrer que φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*0$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (\theta + 2n\pi - \varphi(n)^\alpha) = 0$.

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} (u_{\varphi(n)}) = x$.

4. En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u est $[-1, 1]$.

Fin de l'épreuve