Devoir libre $n^\circ 4$

à rendre le 31/10/2022

Exercice 1 : Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel de dimension finie, $\|.\|$ et $f : E \to \mathbb{R}$, une application continue. On suppose de plus que f est coercive, c'est-à-dire que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Soit F un fermé de E.

1. Soit $\overline{B}(0, R)$ la boule fermée de centre 0 et rayon $R > 0$. Démontrer que $\overline{B}(0, R)$ est une partie compacte de E.

2. En utilisant la coercivité de f, démontrer l'existence de $R > 0$ tel que :

$$\inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in F \cap \overline{B}(0,R)} f(x).$$

En déduire que f atteint son minimum sur F.

3. Soit X un espace vectoriel, éventuellement de dimension infinie, tel que E soit un sous-espace vectoriel dimension de X. Soit $x \in X$.

3*a*. Démontrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R}^+ \\ y & \mapsto & \|y - x\| \end{array}$ est une application continue.

3*b*. Démontrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet (donc en particulier fermé). Pour cela, on démontrera que toute suite de Cauchy est nécessairement contenue dans un compact de E, puis, on utilisera une propriété des compacts.

3*c*. Démontrer l'existence de $x^* \in E$ tel que :

$$\|x - x^*\| = \inf_{y \in E} \|x - y\|.$$

Exercice 2 :

Théorème du point fixe

Soit A une partie complète d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et f une application de A dans A telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de A^2 :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Montrer que f admet un point fixe $a \in A$ et un seul, qui est la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in A, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Indication : *Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.*

Applications

1. Application 1 : On définit la suite de Fibonacci par la relation de récurrence : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

   On s'intéresse à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par la relation explicite : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or)

2. Application 2 : Dans le plan rapporté à un repère orthonormal on considère un triangle ABC avec B et C sur l'axe des abscisses.

   Soit M un point de l'axe des abscisses. On note :
   - P_M le projeté orthogonal de M sur (CA) ;
   - Q_M le projeté orthogonal de P_M sur (AB) ;
   - R_M le projeté orthogonal de Q_M sur (BC).

   On obtient donc une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à l'abscisse de M associe l'abscisse de R_M. On appelle a, b et c les mesures respectives des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

   2*a*. Pour M et M' points distincts de (BC), justifier l'égalité (lorsque $M \neq C$) :

   $$\frac{P_M P_{M'}}{MM'} = \frac{P_M C}{MC} = |\cos c|$$

   2*b*. Démontrer que φ admet un point fixe unique. Que peut-on en déduire ?

3. Application 3 : Soient a et b, deux nombres réels tels que $a < b$. $\mathbb{R}^{[a,b]}$ désigne l'espace des fonctions définies sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. $\mathscr{C}([a, b])$ désigne l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$. On munit cet espace de la norme $\|.\|_\infty$ définie, pour $f \in \mathscr{C}([a, b])$ par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

   Soient k, une fonction de deux variables continue sur le pavé $[a, b]^2$ et g, une fonction d'une seule variable continue sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles. On désigne par φ l'application :

   $$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathscr{C}([a,b]) & \to & \mathbb{R}^{[a,b]} \\ & f & \mapsto & \varphi(f) \end{array}$$

   où $\forall x \in [a, b], \varphi(f)(x) = \displaystyle\int_a^b k(x, t)f(t)\mathrm{d}t$.

   On veut résoudre une équation de Volterra d'inconnue $f \in \mathscr{C}([a, b])$ s'écrivant, pour $\mu \in \mathbb{R}$ donné par :

   $$f(x) - \mu\varphi(f)(x) = g(x),\ \ \forall x \in [a, b]. \tag{1}$$

   3*a*. Démontrer que l'application φ est linéaire et continue.

   3*b*. On suppose dans cette question que $\sup\limits_{(x,t)\in[a,b]^2} |k(x, t)| < \dfrac{1}{|\mu|(b-a)}$.

   i) Écrire (1) sous la forme $T(f) = f$, où $T : \mathscr{C}([a, b]) \to \mathscr{C}([a, b])$ est un opérateur [1] que l'on précisera.

   ii) Démontrer que T est contractant.

   iii) En déduire que l'équation (1) possède une unique solution.

Fin de l'épreuve

1. application linéaire