MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 21/22

Devoir libre $n°5$

à rendre le 12/11/2022

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des formes linéaires sur E (c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$) est noté E^* et est appelé dual algébrique de E. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace de endomorphismes de E.

-I-

Si $a \in E$ et $f \in E^*$, on définit l'endomorphisme $f \otimes a$ de E par :

$$\forall x \in E, \ \ (f \otimes a)(x) = f(x)a$$

L'application transposée d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est l'application ${}^t u : E^* \to E^*$ défini par :

$$\forall \ell \in E^*, \qquad {}^t u(\ell) = \ell \circ u.$$

1. Montrer que l'application ${}^t u$ ainsi associée à u est un endomorphisme de E^*.

2. Si u et v sont dans $\mathscr{L}(E)$, vérifier que

$${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v.$$

3. Soit $a \in E$, $f \in E^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. Vérifier que $u \circ (f \otimes a) = f \otimes u(a)$ et $(f \otimes a) \circ u = {}^t u(f) \otimes a$.

4. Soit $\mathscr{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de E^*. Montrer que la famille $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $u_{ij} = f_i \otimes a_j$, est une base de $\mathscr{L}(E)$.

-II-

Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables, donc il existe une base $\mathscr{E} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de E formée de vecteurs propres de u et des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non nécessairement distinctes tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $u(e_k) = \lambda_k e_k$, il existe une base $\mathscr{A} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de E formée de vecteurs propres de v et des scalaires $\mu_1, ..., \mu_n$ non nécessairement distinctes tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $v(a_k) = \mu_k a_k$. Soit $\mathscr{E}^* = (e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ la base duale de $\mathscr{E}$.

1. Calculer ${}^t u(e_j^*)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

2. On considère l'endomorphisme :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{u,v} : & \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{L}(E) \\ & w & \mapsto & w \circ u - v \circ w \end{array}$$

2a. Montrer que $u_{ij} = e_i^* \otimes a_j$ est un vecteur propre de $\Phi_{u,v}$ et déterminer la valeur propre associée, pour tout $1 \leq i, j \leq n$.
Conclure.

2b. Déterminer le polynôme caractéristique de $\Phi_{u,v}$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ et $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$.

2*c*. Dans cette question, on suppose $u = v$ et on pose $S = \mathrm{sp}(u)$ le spectre de u et S_2 l'ensemble de parties de S à de deux éléments de S et m_λ l'ordre de multiplicité de λ dans S.
Montrer que le polynôme caractéristique de $\Phi = \Phi_{u,u}$ est

$$\chi_\Phi(X) = X^{\sum\limits_{\lambda \in S} m_\lambda^2} \prod_{\{\lambda,\mu\} \in S_2} (X^2 - (\lambda - \mu)^2)^{m_\lambda m_\mu}.$$

2*d*. En déduire la dimension de $\mathscr{C}_u = \{ w \in \mathscr{L}(E) \mid w \circ u = u \circ w \}$.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et soit $w \in \mathscr{L}(E)$. Montrer, d'après ce qui précède, que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

3*a*. $w \circ u = u \circ w$,

3*b*. il existe un polynôme de degré inférieure ou égal à n tel que $w = P(u)$.

Fin de l'épreuve