# Devoir libre $n^\circ 6$

à rendre le 09/12/2022

**Exercice 1 :** La suite de Fibonacci est la suite de nombres réels $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = F_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

**1.** Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = +\infty$.

**2.** Notons $w$ la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Calculer $\dfrac{F_{n+1} - wF_n}{F_n - wF_{n-1}}$ en fonction de $w$ et de $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la suite $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Calculer sa limite.

**3.** Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des suites réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$.

**3*a*.** Vérifier que les suites $(F_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(F_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des éléments de $\mathscr{E}$.

**3*b*.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{E}$. Montrer que la quantité $x_n^2 - x_{n-1}x_{n+1}$ ne dépend pas de l'entier $n$. En déduire, en fonction de $x_0$, $x_1$, $x_n$ et $x_{n+1}$, la somme :

$$(x_1^2 - x_0x_2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_kx_{k+1}}.$$

**3*c*.** En déduire que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{F_{2n+2}F_{2n}}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{F_{2n+3}F_{2n+1}}$ sont convergentes et calculer leur sommes.

**3*d*.** En déduire que les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{F_{n+2}F_n}$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{(-1)^n}{F_{n+2}F_n}$ sont convergentes et calculer leur sommes.

**Exercice 2 :** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^2$ est convergente. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n$ et $A$ par $\alpha_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ et $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

**1.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n^2 - 2\alpha_n a_n \leq (n-1)\alpha_{n-1}^2 - n\alpha_n^2$.

**2.** En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n^2$ est convergente et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 4A$.

**3.** Montrer que 4 est la meilleur constante possible : si $\gamma$ est un nombre réel strictement positif vérifiant $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq 4A$, alors $4 \leq \gamma$.

4. **Application :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que la série de terme général $u_n^2$ converge. Montrer que la famille $\left(\dfrac{u_m u_n}{m+n}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est sommable.

FIN DE L'ÉPREUVE