MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 21/22

Devoir libre $n°7$

à rendre le 02/01/2023

Exercice 1 : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge.

1. Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ (1+2+\ldots+n)^2 \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\ldots+\frac{n^2}{a_n}\right).$$

2. ***2a.*** Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}.$$

2b. En déduire, par sommation, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$.

2c. Montrer que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge.

2d. En déduire que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ converge et que sa somme vérifie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

Exercice 2 : Pour tout nombre réel x strictement positif, on pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\right).$$

Démontrer que f est bien définie sur $]0,+\infty]$ et qu'elle est continue sur $]0,+\infty]$.

Exercice 3 : Étant donné une fonction continue f définie sur l'intervalle ferme $[0,1]$ et à valeurs réelles, le problème a pour but la construction d'une suite de polynômes convergeant uniformément vers f.

1. Soit $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, on pose

$$\Delta^0 y_k = y_k$$

$$\Delta y_k = y_{k+1}-y_k$$
$$\Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k).$$

et de façon générale
$$\Delta^n y_k = \Delta(\Delta^{n-1}y_k).$$

Exprimer $\Delta^n y_k$ en fonction des nombres de la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Étant donne une fonction continue f définie sur l'intervalle ferme $[0,1]$ et à valeurs réelles, on lui associe un polynôme $B_n(f,x)$ défini par

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

Montrer que le polynôme $B_n(f,x)$ est au plus de degré n et qu'on peut l'écrire sous la forme

$$B_n(f,x)=\sum_{t=0}^{n}\Delta^t f(0)\frac{n!}{t!(n-t)!}x^t$$

où

$$\Delta f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right),\ \ k\in[\![0,n]\!].$$

3. Donner l'expression de $B_n(f,x)$ dans chacun des cas particuliers suivants :
   a. $f:x\mapsto 1$.
   b. $f:x\mapsto x$.
   c. $f:x\mapsto x^2$.

4. Dans chacun des cas particuliers précédents, montrer que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

5. Établir la relation

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x).$$

On pourra se servir utilement des expressions de $B_n(1,x)$, $B_n(x,x)$ et $B_n(x^2,x)$ établies précédemment.
En déduire l'inégalité

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4n\delta^2}.$$

où δ est un nombre positif, $x\in[0,1]$ et la sommation est étendue à toutes les valeurs de k appartenant à l'ensemble $\{0,1,2,...,n-1,n\}$ satisfaisant à l'inégalité $\left|\dfrac{k}{n}-x\right|\geq\delta$.

6. Montrer que, si f est une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[0,1]$, la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

FIN DE L'ÉPREUVE