MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra
Année scolaire 22/23

Devoir libre $n°8$

à rendre le 16/01/2023

Exercice 1 : Soit x un nombre réel non négatif. On considère la série de terme général

$$u_n = x^n - x^{n-\frac{1}{2}}, n \geq 1.$$

1. Montrer que cette série est convergente si $0 \leq x \leq 1$.

2. Calculer sa somme $S(x)$. S est elle continue ?

3. Montrer que son reste $R_n(x)$ est égal à $x^n S(x)$.

4. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général u_n sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

5. Démontrer l'inégalité :

$$\left| \int_0^1 R_n(x) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que la série peut être intégrer terme à terme sur $[0, 1]$. Calculer alors la somme de la série obtenue par intégration.

Exercice 2 Soit a un rée tel que $a \in]0, 1[$, I est l'un des intervalle de $\mathbb{R}$: $]0, +\infty[$, $]-\infty, 0[$ ou $\mathbb{R}$, et (E) l'équation

$$(E) : \quad f'(x) = f(ax).$$

On pose $f(0) = \lambda$, où λ est un nombre réel fixé. On appelle solution de (E) sur I, toute fonction f à valeurs réelles définie et dérivable sur I et qui vérifie (E) en tout point x de I.

1. Montrer que si f est une solution de (E) sur I, alors elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et pour tout $p \geq 1$, calculer la dérivée p-ème, $f^{(p)}$ en fonction de a et f.

2. Pour $a = 1$, donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
Dans ce qui suit, f désignera une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter en fonction de f et a les termes de cette série entière.

4. Montrer que l'ensemble des solutions de E sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est donnée par la fonction $f_1 : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{n!}$.

En déduire alors que l'unique solution de E sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est la fonction nulle.

Fin de l'épreuve