Devoir libre $n°9$

à rendre le 26/01/2023

Notations : Dans tout le problème, on considère les notations suivantes :
• Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On note $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (.|.))$ l'espace euclidien des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients réels muni de son produit scalaire canonique défini par :

$$\forall X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \ \ (X|Y) = {}^tXY,$$

où ${}^tX$ est la transposée de X.
• On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
• $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n et à coefficients réels.
• Un vecteur $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à l'élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
• On note par $\mathscr{B} = \{ e_1, e_2, ..., e_n \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
• Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice la transposée de A et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A.
• I_n désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique non nulle vérifiant :

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2 \text{ et } a_{ii} = 0, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

On pose : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $d_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ et $\alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (d_i)$

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on définit : $|X| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}$ et $Q(X) = {}^tXAX$.

1. Montrer que A admet une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On désigne par $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres réelles de A rangées par ordre croissant, c'est-à-dire $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. On note $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ la base orthonormée de vecteurs propres, où pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, v_i est le vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ_i.

2. Montrer qu'il existe $k \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et en déduire que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.

3. Montrer que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq Q(X) \leq \lambda_n \|X\|^2.$$

4. On note $S = \{ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X\| = 1 \}$ la sphère unité de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4*a*. Montrer que S est un fermé borné de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

4*b*. Montrer que Q est continue sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que Q est bornée sur S et atteint ses bornes.

4*c*. Calculer $Q(v_1)$ et $Q(v_n)$. En déduire que $\lambda_1 = \min\limits_{X \in S} Q(X)$ et $\lambda_n = \max\limits_{X \in S} Q(X)$.

5. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

5*a*. Montrer que $|Q(X)| \leq \alpha \|X\|^2$ et en déduire que : $\lambda_n \leq \alpha = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (d_i)$.

5*b*. Comparer $|Q(X)|$ et $Q(|X|)$. En déduire que, pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $|\lambda_i| \leq \lambda_n$.

6. Soit $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, la matrice définie par : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On note $P_n(\lambda) = \det(\lambda I_n - A_n)$ le polynôme caractéristique de la matrice A_n.

6*a*. Établir que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \geq 2$: $P_{n+2}(\lambda) = \lambda P_{n+1}(\lambda) - P_n(\lambda)$.
En déduire que : pour tout $n \geq 2$, $P_n(2) = n + 1$.

6*b*. Montrer que pour toute valeur propre μ de A_n, on a : $|\mu| < 2$.

6*c*. En déduire qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi[$ tel que : $\mu = 2\cos(\theta_0)$.

6*d*. Montrer que, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $P_n(2\cos(\theta)) = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$. Déterminer alors : $\mathrm{sp}(A_n)$.

FIN DE L'ÉPREUVE