Devoir libre $n^\circ 10$

à rendre le 10/02/2023

Exercice 1 : On note a_n le nombre de n-uplet d'entiers $(k_1, k_2, ..., k_n)$ valant 0, 1 ou 2 tels que $k_1 + k_2 + ... + k_n = n$. On pose $a_0 = 1$.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.

2. Montrer que a_n est le coefficient de X^n dans le polynôme $P(X) = (1 + X + X^2)^n$.

3. Montrer que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\mathrm{d}t$.

4. En déduire que $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(1+2\cos t)^n\mathrm{d}t$.

5. Pour $x \in \left[\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$, on pose : $A(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.
Montrer que :

$$A(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{1 - x(1+2\cos t)}\mathrm{d}t.$$

6. En utilisant le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$, montrer que :

$$\forall x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right],\ A(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-3x)(1+x)}}.$$

En déduire que

$$\forall x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right],\ (1 - 2x - 3x^2)A'(x) = (1+3x)A(x).$$

7. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1}a_n + \dfrac{3n}{n+1}a_{n-1}$.

Exercice 2 : On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - x\sin^2(t)}}$.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale définissant $f(x)$ existe.
Examiner en particulier l'existence de $f(1)$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D. et expliciter ses dérivées f' et f''.

3. Montrer qu'il existe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exprimer a_n, en fonction de l'intégrale $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n} t\mathrm{d}t$.

4. On considère l'équation différentielle

$$(E)\ \ (x^2 - x)y'' + (2x-1)y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

4*a*. Déterminer les solutions de (E) qui sont développables en série entière au voisinage de zéro.
Préciser le rayon de convergence des séries entières obtenues .

4*b*. Calculer $\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\sin(t)\cos(t)}{4(1 - x\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\right]$. puis établir que f est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $w_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

5. Montrer que la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(1-x)$ est solution de (E) sur $]0, +\infty[$.
Vérifier que la famille (f, g) est libre, puis en déduire toutes les solutions de (E) sur $]0, 1[$.

FIN DE L'ÉPREUVE