

DEVOIR LIBRE n°11

à rendre le 20/02/2023

n est un entier $n \geq 2$. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à coefficients complexes taille n .

On dit qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de cet ensemble est une matrice stochastique si elle vérifie les conditions suivantes :

- Tous ses termes sont des réels positifs ou nuls.
- Pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$: $a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} = 1$, c'est à dire que la somme des termes de chacune de ses lignes est égale à 1.

On désigne par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de taille n .

Partie 1. Généralités.

1. On désigne par V_1 la matrice-colonne d'ordre n dont tous les termes sont égaux à 1. Montrer que une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont positifs ou nuls est stochastique si et seulement si $MV_1 = V_1$.
2. **2a.** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_n$. Établir que AB appartient à $\mathcal{S}_n$.
2b. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n$. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, A^k appartient à $\mathcal{S}_n$.
3. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A dans le sens que pour tout vecteur ligne $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, l'image $f(x)$ est donnée par :

$$f(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout vecteur ligne de $\mathbb{C}^n$ on convient de noter : $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$.

3a. Justifier que 1 est valeur propre de f et citer un vecteur propre associé.

3b. Établir que pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$: $\|f(x)\| \leq \|x\|$. En déduire que les modules des valeurs propres de f sont tous ≤ 1 .

4. On se propose de montrer que : $\mathbb{C}^n = \text{Im}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id})$.

4a. Soit y un élément de l'ensemble $\text{Im}(f - \text{Id}) \cap \text{Ker}(f - \text{Id})$. Il existe x de $\mathbb{C}^n$ tel que $y = f(x) - x$. Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $f^k(x)$ en fonction de x , y et k . Établir qu'alors $k\|y\| \leq 2\|x\|$ et en déduire que y est nécessairement nul.

4b. Conclure.

5. Établir que tout sous-espace propre associé à une valeur propre de f autre que 1 est inclus dans $\text{Im}(f - \text{Id})$.
6. On suppose que l'endomorphisme f est diagonalisable, et l'on classe ses valeurs propres par modules décroissants :

$$1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \dots \geq \lambda_n$$

(une même valeur propre pouvant être répétée plusieurs fois, autant que son ordre l'exige).

On complète une base $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ de $\text{Ker}(f - \text{Id})$ en une base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n)$ de vecteurs propres de $\mathbb{C}^n$, chaque v_i étant associé à λ_i . Soit D la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}'$

6a. Prouver que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(D^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge

6b. Prouver que la suite $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si 1 est la seule valeur propre de f dont le module est égal à 1.

6c. Dans ces conditions montrer que $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice de la projection sur $\text{Ker}(f - \text{Id})$ suivant la direction de $\text{Im}(f - \text{Id})$.

Partie 2. Application à une situation probabiliste. Généralement, un processus stochastique est une suite d'expériences dont le résultat dépend du hasard. Ici, nous admettrons qu'en certains instants $0, 1, 2, \dots, t, \dots$ nous observons un système. Celui-ci peut se trouver dans l'un des états d'une collection finie d'états possibles. L'observation du système est ainsi considérée comme une expérience dont le résultat (aléatoire) est l'état dans lequel se trouve le système au moment de l'observation.

Nous supposons que nous connaissons pour chaque paire d'états i et j , et pour chaque instant t , la probabilité $p_{ij}(t)$ que le processus soit dans l'état j à l'instant $t + 1$ étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t . De plus, la probabilité $p_{ij}(t)$ sera supposée ne pas dépendre de t (de ce fait, elle pourra être notée simplement p_{ij}).

Un tel processus est appelé chaîne de Markov (à temps discret et avec un ensemble fini d'états), du nom de son inventeur Andrei Andreyevich Markov (1856-1922). Avec ces hypothèses, nous pouvons décrire le système en donnant l'ensemble $\{u_1, \dots, u_m\}$ des états u_i possibles et une matrice P de taille m dont le terme p_{ij} est la probabilité que le processus soit dans l'état j à l'instant $t + 1$ étant donné qu'il se trouve dans l'état i à l'instant t . P est appelée matrice de transition du système.

On représente généralement P par un graphe orienté G dont les sommets correspondent aux m états et les arcs aux couples ordonnés d'états (i, j) tels que $p_{ij} > 0$.

On remarque que la somme de chaque ligne vaut 1, c'est à dire que la matrice de transition est une matrice stochastique.

On se propose d'étudier, à titre d'exemple, la situation suivante :

On désire étudier sur un certain nombre d'années les mouvements migratoires d'une population lors des vacances d'été. L'observation de cette population a conduit à la construction d'un modèle mathématique dont les hypothèses sont les suivantes :

H_1 : Le territoire sur lequel évolue la population durant les vacances d'été est divisé en trois régions, notées 1, 2, 3.

H_2 : Chaque année, tout individu de la population étudiée choisit une région et une seule pour y passer toutes les vacances d'été.

H_3 : Le choix d'une région par un individu pour y passer ses vacances d'été est un phénomène aléatoire qui évolue dans le temps à partir d'une année initiale appelée année 1.

On note $A_i(n)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et $n \geq 1$, l'événement : « choisir la région i pour y passer ses vacances d'été, l'année n » et $\alpha_i(n) = p[A_i(n)]$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) la probabilité de choisir l'année n , la région i pour y passer ses vacances d'été.

H_4 : $\alpha_1(1) = 0.2$, $\alpha_2(1) = 0.45$ et $\alpha_3(1) = 0.35$.

H_5 : La probabilité de choisir la région i ($i \in \{1, 2, 3\}$), pour y passer ses vacances l'année $n + 1$, ne dépend que du choix effectué l'année n .

On note $a_{ij} = p[A_i(n + 1)/A_j(n)]$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$, la probabilité de choisir la région i l'année $n + 1$, sachant que l'année n , on choisi la région j .

On suppose que $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$, a_{ij} est indépendant de l'année considérée et que les a_{ij} sont les éléments de la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

H_6 : On suppose que la population étudiée reste inchangée durant toutes les années prises en considération dans ce modèle.

1. **1a.** Soit B_n l'événement « choisir chaque année la région 2 durant toutes les n premières années ». Calculer $p(B_3)$.

Exprimer $p(B_n)$ en fonction de n .

1b. Sachant qu'un individu choisit la région 1 l'année 2, quelle est la probabilité qu'il ait choisi la région 2 l'année 1 ?

1c. Calculer la probabilité pour qu'un individu change de région entre la première année et la deuxième année.

2. **2a.** Exprimer, en le justifiant, une relation entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(n) \\ \alpha_2(n) \\ \alpha_3(n) \end{pmatrix},$$

puis entre les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1(n+1) \\ \alpha_2(n+1) \\ \alpha_3(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1(1) \\ \alpha_2(1) \\ \alpha_3(1) \end{pmatrix}.$$

2b. Calculer $\det(M)$.

2c. Calculer, dans le corps $\mathbb{C}$, les valeurs propres de M .

2d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice M^n s'écrit sous la forme : $M^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

où λ est un élément de $\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1, $\bar{\lambda}$ son conjugué, $P = \begin{pmatrix} 1 & x' & x'' \\ 1 & y' & y'' \\ 1 & z' & z'' \end{pmatrix}$

est une matrice inversible à éléments dans $\mathbb{C}$. (on ne cherchera pas à déterminer les éléments des deux dernières colonnes de P).

$P^{-1} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P . (on ne cherchera pas ici à calculer la valeur des éléments de P^{-1}).

3. **3a.** Montrer que la suite de matrices $(M^n)_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

3b. Dédire de ce qui précède les valeurs des éléments a, a', a'' de la matrice P^{-1} .

3c. Montrer que les suites $(\alpha_1(n))_{n \geq 1}$, $(\alpha_2(n))_{n \geq 1}$, $(\alpha_3(n))_{n \geq 1}$ convergent. Calculer leurs limites.

FIN DE L'ÉPREUVE