Devoir libre $n^\circ 2$

à rendre le 25/09/2023

Problème (Matrices de trace nulle)

Les parties II et III sont indépendantes; la partie I leur est préliminaire.

Soit n un entier strictement positif, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathbb{N}_n$ l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ des nombres entiers compris entre 1 et n. Pour tout élément $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$, on pose :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On appelle $\mathscr{C}$ la base canonique des $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, elle est constituée des matrices E_{kl} dont l'élément situé à la ième ligne et à la jème colonne vaut $\delta_{ik}\delta_{jl}$.

On définit sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application trace, noté Tr, par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

où a_{ii} désigne l'élément de M situé à la ième ligne et à la jème colonne.

Partie I

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
3. Soit M et M' deux matrices semblables (c'est-à-dire qu'il existe une matrice P inversible telle que : $M' = P^{-1}MP$).
   Montrer que $\mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(M)$.
4. Soit (i, j, k, l) appartenant à $\mathbb{N}_n^4$, calculer $E_{ij}E_{kl}$.

Partie II

Soit $\mathscr{M}_n^*(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On considère la partie Θ de $\mathscr{M}_n^*(\mathbb{R})$ définie par :

$$(\varphi \in \Theta) \iff (\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)).$$

1. Montrer que Θ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^*$.
2. Soit φ un élément de Θ. Montrer que :

a) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \varphi(E_{ij}) = \delta_{ij}\varphi(E_{ii})$.

b) $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n^2, \varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$.

3. Déterminer la dimension de Θ et en expliciter une base.

Partie III

On considère n nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ deux à deux distincts et D la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_{ii}.$$

On définit l'application L sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad L(Y) = DY - YD.$$

1. Montrer que L est linéaire.
2. Soit (i,j) appartenant à $\mathbb{N}_n^2$, calculer $L(E_{ij})$.
3. Déterminer le rang et l'image de L.
4. Soit C et C' deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que C et C' sont semblables et qu'il existe (X', Y') de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $C' = X'Y' - Y'X'$.
   Montrer qu'il existe (X,Y) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $C = XY - YX$.
5. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V. Montrer que si f n'est pas une homothétie, alors il existe u appartenant à V tel que $(u, f(u)$ est libre.
6. Soit C un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, prouver l'équivalence :
   $$(\mathrm{Tr}(C) = 0 \iff (\text{ } C \text{ est semblable à une matrice de l'image de } L \text{ })$$
   Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n.
7. De ce qui précède, déduire l'équivalence :
   $$(\mathrm{Tr}(C) = 0) \iff (\exists (X,Y) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 : C = XY - YX).$$

Fin de l'épreuve