Devoir libre $n^\circ 3$

à rendre le 13/10/2023

Problème (sur les normes de $\mathbb{R}[X]$)

Exercice On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Pour toute suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles positives on pose

$$N_u : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k |a_k| \end{array}$$

(ces sommes sont à support fini et peuvent s'écrire aussi $\sum_{k=0}^{\deg(P)}$, elles ne posent aucun problème de convergence)

1. Montrer que pour toute suite u à valeurs strictement positives, N_u est une norme.

2. Soit u, v deux suites à valeurs strictement positives. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N_u \leq C N_v$ si et seulement si $u_n = O(v_n)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la norme N_u soit équivalente à la norme N_v.
On considère de plus la norme

$$N : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \end{array}$$

On note e la suite constante égale à 1.

3. **3*a*.** Déterminer une constante $K \in \mathbb{R}_+^*$ telle que $N \leq K N_e$.
3*b*. Les normes N et N_e sont-elles équivalentes ?

4. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $a_1, ..., a_{d+1}$ des éléments deux à deux distincts de $[0, 1]$
4*a*. Déterminer des polynômes $L_1, ..., L_{d+1}$ de $\mathbb{R}_d[X]$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_d[X]$, $P = \sum_{i=1}^{d+1} P(a_i) L_i$.
4*b*. En déduire, sans admettre l'équivalence de toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie, que les restrictions de N_e et N à $\mathbb{R}_d[X]$ sont équivalentes.

Fin de l'épreuve