Devoir libre $n°4$

à rendre le 23/10/2023

Exercice 1 : Un théorème du point fixe Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique telle que $f(I)$ est inclus dans I et

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

pour tout $x, y \in I$ tels que $x \neq y$.

1. Vérifier que f est uniformément continue sur I.

2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique que l'on notera α.

3. On définit la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée d'un point $x_0 \in I$ et la formule

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Vérifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, et soit h sa limite.

4. Montrer que la suite $(|x_n - \alpha|)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Trouver sa limite en fonction de h.

5. Démontrer que $|f(h) - \alpha| = |h - \alpha|$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Exercice 2 : L'espace vectoriel des fonctions polynômes sur un intervalle E désigne l'espace vectoriel des applications polynômes de l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f (pour $n = 0$, c'est f elle même ; et, pour $n = 1$, on emploie aussi la notation f'.
On rappelle que, pour qu'une partie A d'un espace vectoriel normé soit compacte, il faut et il suffit que toute suite d'éléments de A admette une sous-suite qui converge vers un élément de A. On rappelle aussi que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une partie est compacte si, et seulement si, elle est bornée (c'est à dire contenue dans une boule) et fermée.

1. Vérifier que l'on définit une norme sur E en associant à toute fonction polynôme f le nombre

$$\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}$$

(il s'agit d'une somme finie).
Dans la suite, E est muni de cette norme.

2. **2*a*.** Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f \longmapsto f^{(n)}(0)$ de E dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.

   Calculer sa norme.

   2*b*. Montrer que l'application $f \longmapsto f'$ de E dans E n'est pas continue.

3. On définit sur E une relation d'ordre, notée $\prec$, en disant que l'on a $f \prec g$ si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f^{(n)}(0) \leq g^{(n)}(0)$$
(il est inutile d'expliciter la vérification du fait qu'il s'agit d'une relation d'ordre). Montrer que, quel que soit $f \in E$, le sous-ensemble F de E constitué par les éléments g tels que l'on ait $f \prec g$ et celui G constitué par les éléments h tels que l'on ait $h \prec f$ sont, l'un et l'autre, fermés.

4. Étant donné deux éléments f et g de E tels que l'on ait $f \prec g$, on désigne par $[f, g]$ le sous-ensemble de E constitué par les éléments h tels que l'on ait $f \prec h \prec g$. Montrer que $[f, g]$ est compact.

5. θ désignant ici la fonction nulle sur [-1, 1], soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers θ et telle que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on ait $\theta \prec f_p$.

   Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}} [\theta, f_p]$ est compact.

Exercice 3 : Image d'un espace vectoriel par une application continue Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et f l'application définie sur E par :
$$\forall x \in E, \;\; f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}.$$

1. Montrer que f est continue de E dans E pour la norme $\|.\|$.
2. Montrer que $f(E) = \overline{B}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ (la boule fermé de centre 0 et de rayon $\dfrac{1}{2}$).

Fin de l'épreuve