Devoir libre $n°5$

à rendre le 7/11/2023

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie ou non sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes et f un endomorphisme de E, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. Pour tout nombre λ de $\mathbb{C}$, montrer que la suite des noyaux $N_k(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda i)^k$ est croissante avec l'entier k (i désigne l'identité de E). En déduire que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(f - \lambda i)^k$ est un sous-espace vectoriel de E que l'on notera F_λ.

2. Démontrer que F_λ n'est pas réduit à $\{0\}$ si et seulement si λ est valeur propre de f et que F_λ est stable par f.
F_λ est appelé sous-espace spectral relatif à la valeur propre λ.

3. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$ est directe.

4. Soit λ une valeur propre de f, on suppose qu'il existe un plus petit entier $n(\lambda)$ strictement positif tel que :

$$N_{n(\lambda)}(\lambda) = N_{n(\lambda)+1}(\lambda),$$

montrer qu'alors on a $F_\lambda = N_{n(\lambda)}(\lambda)$. L'entier $n(\lambda)$ s'appelle l'indice de la valeur propre λ qui est alors dite d'indice fini.

5. Montrer par un exemple simple, dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, qu'une valeur propre d'un endomorphisme n'est pas toujours d'indice fini.

6. Si l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ formé par les polynômes P tels que $P(f) = 0$ n'est pas réduit au polynôme nul, il admet un générateur non nul π_f, appelé polynôme minimal de f.
Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ n'admettant pas de polynôme minimal.

7. Démontrer que si f admet un polynôme minimal π_f, on a les propriétés suivantes :

7*a.* L'ensemble des valeurs propres de f ou spectre de f noté $\mathrm{sp} f$ est non vide et fini.

7*b.* Toutes les valeurs propres de f sont d'indice fini.

7*c.* On a $\pi_f(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{sp} f} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$ où $n(\lambda)$ est l'indice de la valeur propre λ.

7*d.* f est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire E est somme directe des sous-espaces spectraux F_λ.
$E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{sp}(f)} F_\lambda$.

Fin de l'épreuve