

DEVOIR LIBRE n°6

à rendre le 20/11/2023

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. A un vecteur non nul de E et u une forme linéaire sur E , non nulle.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices (n, n) à coefficients réels. Si M appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\text{Tr } M$ sa trace.

Première partie

1. Soit f l'application de E dans E définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = u(x)A.$$

Montrer que f est un endomorphisme de E , déterminer son rang.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f .

3. On suppose que E est de dimension finie $n > 0$.

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et u pour que f soit diagonalisable.

4. Soit g , endomorphisme de E . On suppose que E est de dimension finie $n > 0$, et que le rang de g est 1.

4a. Montrer qu'il existe v , forme linéaire sur E non nulle et B , vecteur de E , tels que :

$$\forall x \in E, g(x) = v(x)B$$

4b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur g^2 pour que g soit diagonalisable.

4c. On suppose que $g^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha \neq 0.$$

4d. On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. En déduire que deux matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblable si et seulement si elles ont même trace.

6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Montrer que M et N sont semblables. (de préférence en utilisant les résultats des questions 4. et 5.)

Deuxième partie

Dans cette partie, E n'est pas nécessairement de dimension finie.

On suppose $A \notin \text{Ker } u$.

Soit h , endomorphisme de E , définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = u(A)x - u(x)A$$

1. Reconnaître la restriction de h à $\text{Ker } u$, déterminer le noyau de h .
2. Montrer que la forme linéaire $u \circ h$ est nulle. En déduire l'image de h .
3. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de h , lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?
4. **4a.** Soit un réel α non nul. Résoudre, selon les valeurs de α , l'équation d'inconnue x :

$$\alpha x - u(x)A = 0 \tag{1}$$

4b. Soit alors un vecteur B de E . Résoudre, selon les valeurs de α et B , l'équation d'inconnue x :

$$\alpha x - u(x)A = B \tag{2}$$

5. Appliquer les résultats de la question II-4. à la résolution des deux exercices suivants :

5a. E est l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si $M \in E$, $u(M)$ est la trace de M . A est une matrice de trace non nulle, et ${}^t A$ est sa transposée. Déterminer les matrices X de E telles que :

$$(\text{Tr } A)X - (\text{Tr } X)A = {}^t A - A \tag{3}$$

5b. $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, $u(f) = \int_0^\pi f(t)dt$. Déterminer les fonctions f de E , telles que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) - \sin(x) \int_0^\pi f(t)dt = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \tag{4}$$

FIN DE L'ÉPREUVE